Introductory notes on Reduced Kronecker (or reduced inner) products for the Symmetric Group S_n

(22 January 2001)

These notes are intended for those already familiar with the general properties of symmetric functions and the basic ideas of the symmetric group.

The evaluation of the Kronecker products of the irreducible representations of the symmetric group S_n arises in various problems of interest to physicists. Combinatorists often refer to the equivalent problem of evaluating the inner products of $S-$functions. In the case of the outer products of $S-$functions one has the celebrated Littlewood-Richardson rule . A similar combinatorial tool does not seem to be known for the inner products. Littlewood[2], following from earlier work by Murnaghan[1], introduced the idea of an essentially $n-$independent reduced inner product. For further information see [3–5] and references contained therein.

The resolution of the inner product of two $S-$functions, $s_\lambda \circ s_\mu$ with $\lambda, \mu \vdash n$ such that

$$s_\lambda \circ s_\mu = \sum_{\nu \vdash n} c^{\nu}_{\lambda\mu} s_\mu \tag{1}$$

is related to the character decomposition for the symmetric group S_n where

$$\chi^{(\lambda)}_\rho \chi^{(\mu)}_\rho = \sum_{\nu} g^{\nu}_{\lambda\mu} \chi^{(\nu)}_\rho \tag{2}$$

with the coefficients, $g^{\nu}_{\lambda\mu}$, being non-negative integers.

The tensor irreducible representation $\{\lambda\}$ of S_n may be labelled by ordered partitions (λ) of integers where $\lambda \vdash n$. In reduced notation the label $\{\lambda\} = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$ for S_n is replaced by $\langle\lambda\rangle = \langle\lambda_2, \ldots, \lambda_p\rangle$. Given any irreducible representation $\langle\mu\rangle$ in reduced notation it can be converted back into a standard irreducible representation of S_n by prefixing it with a part $(n-|\mu|)$. For example, an irreducible representation $\langle 21\rangle$ in reduced notation corresponds to $\{321\}$ in S_6, $\{921\}$ in S_{12}, $-\{1^3\}$ in S_3 or $\{-121\} = -\{101\} = 0$ in S_2 etc. If $n - |\mu| \geq \mu_1$ then the resulting irreducible representation is assuredly a standard irreducible representation of S_n. However, if $n - |\mu| < \mu_1$ then the resulting irreducible representation is non-standard and must be converted into standard form using $S-$function modification rules[7].

Evaluation of reduced Kronecker products

A reduced Kronecker product $\langle\lambda\rangle \circ \langle\mu\rangle$ may be evaluated by the recursive relation[2,3]

$$\langle\lambda\rangle \circ \langle\mu\rangle = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \langle\{\lambda/\alpha\beta\} \cdot \{\mu/\alpha\gamma\} \cdot \{\beta \circ \gamma\}\rangle \tag{3}$$

where / indicates an $S-$function skew, a dot $\cdot$ ordinary Littlewood-Richardson $S-$function multiplication and a circle $\circ$ the ordinary inner $S-$function multiplication.

Thus, for example, $\langle 21\rangle \circ \langle 2^2\rangle =$

$\langle 51\rangle$	$+ \langle 5\rangle$	$+ \langle 43\rangle$	$+ \langle 421\rangle$	$+ 3\langle 42\rangle$
$+ 3\langle 41^2\rangle$	$+ 5\langle 41\rangle$	$+ 3\langle 4\rangle$	$+ \langle 3^21\rangle$	$+ 2\langle 3^2\rangle$
$+ \langle 32^2\rangle$	$+ \langle 321^2\rangle$	$+ 6\langle 321\rangle$	$+ 7\langle 32\rangle$	$+ 3\langle 31^3\rangle$
$+ 8\langle 31^2\rangle$	$+ 8\langle 31\rangle$	$+ 3\langle 3\rangle$	$+ \langle 2^31\rangle$	$+ 2\langle 2^3\rangle$
$+ 3\langle 2^21^2\rangle$	$+ 7\langle 2^21\rangle$	$+ 5\langle 2^2\rangle$	$+ \langle 21^4\rangle$	$+ 5\langle 21^3\rangle$
$+ 8\langle 21^2\rangle$	$+ 6\langle 21\rangle$	$+ 2\langle 2\rangle$	$+ \langle 1^5\rangle$	$+ 3\langle 1^4\rangle$
$+ 3\langle 1^3\rangle$	$+ 2\langle 1^2\rangle$	$+ \langle 1\rangle$		

Equation (3) simplifies for the special cases where the two reduced irreducible representations correspond to columns or rows to give the three cases

$$\langle k\rangle \circ \langle \ell\rangle = \sum_{p=0}^{\min(k,\ell)} \sum_{q=0}^{p} \langle k-p\cdot \ell-p\cdot p-q\rangle \tag{4a}$$

$$\langle k\rangle \circ \langle 1^{\ell}\rangle = \sum_{p=0}^{1} \sum_{q=p}^{min(k-p,\ell-p)} \langle k-q\cdot 1^{\ell-q}\cdot 1^{q-p}\rangle \tag{4b}$$

$$\langle 1^k\rangle \circ \langle 1^{\ell}\rangle = \sum_{p=0}^{\min(k,\ell)} \sum_{q=0}^{p} \langle 1^{k-p}\cdot 1^{\ell-p}\cdot p-q\rangle \tag{4c}$$

We have tabulated these three cases for $6\geq k,\ell\geq 1$. Inspection suggests that for case (4a) $g^{\langle\nu\rangle}_{\langle k\rangle\langle\ell\rangle}$ can grow without limit as do k and ℓ whereas for cases (4b) and (4c) we have respectively

$$3\geq g^{\langle\nu\rangle}_{\langle k\rangle\circ\langle 1^{\ell}\rangle}\geq 0 \tag{4b'}$$

$$2\geq g^{\langle\nu\rangle}_{\langle 1^k\rangle\circ\langle 1^{\ell}\rangle}\geq 0 \tag{4c'}$$

Furthermore one can see many examples where the coefficients achieve stable values. In order to explore these properties further we shall first consider case (4b) and see if we can construct rules for determining the coefficients. We note that Remmel and Whitehead[8,9] have considered the case of single hook ordinary Kronecker products for S_n. A single hook corresponds to a single column in reduced notation. Our problem is to determine the non-negative integers $g^{\nu}_{\langle k\rangle\circ\langle 1^{\ell}\rangle}$ and the permissible $\langle\nu\rangle$.

Constraints on $\langle\nu\rangle$

The weight w_ν must satisfy

$$k+\ell\geq w_\nu\geq k-\ell \tag{5}$$

with

$$w_\nu(k\ell pq)=k+\ell-p-q \tag{6}$$

The shape of (ν) is such that

$$2\geq \nu_i\geq 0 \quad \text{for } i>1 \tag{7}$$

Decorating a shape (ν)

We assume the shape (ν) is a standard Young frame and satisfies the above constraints. A given term in Eq. (4) can be decorated with three distinct symbols in accord with the Littlewood-Richardson rule . To decorate the shape $\nu(k\ell pq)$ we will use:-

$$k-p\ (\star) \quad \ell-p\ (\bullet) \quad \text{and } p-q\ (\diamond) \tag{8}$$

Note that the number of symbols n are such that

$$n(\star)-n(\bullet)=k-\ell \tag{9a}$$

$$\ell\geq n(\diamond)\geq 0 \tag{9b}$$

Different types of products require the enunciation of different types of decorations of shapes.

The reduced Kronecker products $\langle k\rangle\circ\langle 1^{\ell}\rangle$

As a warm-up exercise let us work through some specific cases involving the products $\langle k\rangle\circ\langle 1^{\ell}\rangle$. We will often suppress the lower suffixes of $g^{\langle\nu\rangle}_{\langle k\rangle\circ\langle 1^{\ell}\rangle}$ writing just $g^{\langle\nu\rangle}$. Recall (4b)

$$\begin{aligned}\langle k\rangle \circ \langle 1^{\ell}\rangle &= \sum_{p=0}^{1} \sum_{q=p}^{min(k-p,\ell-p)} \langle k-q\cdot 1^{\ell-q}\cdot 1^{q-p}\rangle \\ &= \sum_{\nu} g^{\nu}\langle\nu\rangle \end{aligned} \tag{10}$$

For this particular product there are four generic shapes corresponding to the four partition types:-

$$(a2^r1^s) \qquad [a\geq 3], \qquad (a1^s) \qquad [a\geq 3], \qquad (2^r1^s), \qquad (1^s) \tag{11}$$

Consider a shape $\langle\nu\rangle$. Application of the Littlewood-Richardson rule to (10) readily leads to the following decoration rules:-

1. *Draw the shape for $\langle\nu\rangle$ as a standard left adjusted Young frame.*
2. *Place $k-q$ $\star$ in the top row starting from the left-most cell.*
3. *Place $\ell-q$ $\bullet$ in the first column, below a $\star$ if need be. At most one of the $\bullet$ may be placed in the top row to the right of the right-most $\star$.*
4. *Place $q-p$ $\diamond$ in the first column below any $\star$ or $\bullet$, or in the second column below any $\star$ or $\bullet$ but with no $\diamond$ appearing more than once in any row. At most one $\diamond$ may be placed in the top-most row to the right of any $\star$ or $\bullet$.*
5. *The multiplicity $g^{\langle\nu\rangle}_{\langle k\rangle\circ\langle 1^\ell\rangle}$ is the number of independent decorations of the shape of $\langle\nu\rangle$.*

As an example consider the evaluation of $g^{\langle 321^2\rangle}_{\langle 5\rangle\circ\langle 1^6\rangle}$. Applying the above rules we find the three decorations given below:-

$$\begin{array}{ccc} \star & \star & \diamond \\ \bullet & \diamond & \\ \bullet & & \\ \bullet & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \star & \star & \bullet \\ \bullet & \diamond & \\ \bullet & & \\ \diamond & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \star & \bullet & \diamond \\ \bullet & \diamond & \\ \diamond & & \\ \diamond & & \end{array}$$

$$\text{(a)} \qquad\qquad \text{(b)} \qquad\qquad \text{(c)} \tag{12}$$

and hence we may conclude that $g^{\langle 321^2\rangle}_{\langle 5\rangle\circ\langle 1^6\rangle}=3$. Note that decorations (a) and (b) correspond to $q=3,\ p=1$ while for (c) $q=4,\ p=0$.

For single column shapes (1^s) it is left as an exercise to show that the only cases are:-

$$\langle 1\rangle\circ\langle 1^\ell\rangle \supset \langle 1^{\ell-1}\rangle+\langle 1^\ell\rangle+\langle 1^{\ell+1}\rangle \tag{13a}$$

$$\langle k\rangle\circ\langle 1^\ell\rangle \supset \langle 1^{\ell-1}\rangle+2\langle 1^\ell\rangle+\langle 1^{\ell+1}\rangle \qquad (k>1,\ \ell\geq k) \tag{13b}$$

$$\langle k\rangle\circ\langle 1^\ell\rangle \supset \langle 1^{\ell-1}\rangle+\langle 1^\ell\rangle \qquad (k=\ell+1) \tag{13c}$$

Let us return to (10). The Littlewood-Richardson rule leads to

$$\{1^{\ell-q}\cdot 1^{q-p}\} = \sum_{x=0}^{min(\ell-q,q-p)} \{2^x1^{\ell-p-2x}\} \tag{14}$$

Using the Littlewood-Richardson rule again gives

$$\langle k-q\cdot 1^{\ell-q}\cdot 1^{q-p}\rangle = \sum_{x=\alpha}^{\min(\ell-q,q-p)} \{ \quad \langle k-q+2,2^{x-1},1^{\ell-p-2x}\rangle \tag{15a}$$

$$+\langle k-q+1,2^x,1^{\ell-p-2x-1}\rangle \tag{15b}$$

$$+\langle k-q+1,2^{x-1},1^{\ell-p-2x+1}\rangle \tag{15c}$$

$$+\langle k-q,2^x,1^{\ell-p-2x}\rangle \qquad \} \tag{15d}$$

where $\alpha=0,\ 1$ as appropriate.

Let us now consider the case of the generic shapes (2^r1^s) of weight $k+\ell-q-p=2r+s$. The permissible values of r ans s are further restricted by the requirement that $r+s\geq q-p$. Furthermore, to produce partitions of the appropriate shape we must restrict the values of $k-q$ to $\{0,\ 1,\ 2\}$ in (15a), (15b,c) and (15d) respectively which in turn restricts q to the values $\{k,\ k-1,\ k-2\}$. Inspection of (15a-d)shows also that

$$\ell\geq q \qquad \text{and} \qquad q\geq p \tag{16}$$

Given the above restrictions and specialising (15a-d) gives the following four sets of terms appropriate to the generic shape (2^r1^s)

$$(q = k, \quad \ell \geq k+1, \quad k \geq p+1 \quad) \qquad \sum_{x=1}^{min(\ell-k,k-p)} \langle 2^x 1^{\ell-p-2x}\rangle \tag{17a}$$

$$(q = k-1, \quad \ell \geq k, \quad k \geq p+1 \quad) \qquad \sum_{x=0}^{min(\ell-k+1,k-p-1)} \langle 2^{x+1} 1^{\ell-p-2x-1}\rangle \tag{17b}$$

$$(q = k-1, \quad \ell \geq k, \quad k \geq p+2 \quad) \qquad \sum_{x=1}^{min(\ell-k+1,k-p-1)} \langle 2^x 1^{\ell-p-2x+1}\rangle \tag{17c}$$

$$(q = k-2, \quad \ell \geq k-2, \quad k \geq p+2 \quad) \qquad \sum_{x=0}^{min(\ell-k+2,k-p-2)} \langle 2^{x+1} 1^{\ell-p-2x}\rangle \tag{17d}$$

where the relevant constraints have been placed in curved brackets,(,) preceding each expression.

As an example, consider the reduced product $\langle 4\rangle \circ \langle 1^4\rangle$. Inspection of (17a) shows that no terms of the generic shape (2^r1^s) are possible since $k = l = 4$. From (17b) we have terms with $x = 0, 1$ leading to the string

$$\langle 21^2\rangle + \langle 21^3\rangle + \langle 2^2\rangle + \langle 2^21\rangle \qquad (18b),$$

while for (17c) we are restricted to $x = 1$ leading to the string

$$\langle 21^2\rangle + \langle 21^3\rangle \qquad (18c),$$

while (17d) the values of $x = 0, 1, 2$ are possible but in the case of $x = 2$ only $p = 0$ is permitted leading to the string

$$\langle 21^3\rangle + \langle 21^4\rangle + \langle 2^21\rangle + \langle 2^21^2\rangle + \langle 2^3\rangle \tag{18d}$$

Combining (18b-d) yields the final result

$$\langle 4\rangle \circ \langle 1^4\rangle \supset 2\langle 21^2\rangle + 3\langle 21^3\rangle + \langle 21^4\rangle + \langle 2^2\rangle + 2\langle 2^21\rangle + \langle 2^21^2\rangle + \langle 2^3\rangle \tag{19}$$

as is indeed found by explicit calculation.

For shapes of the generic type $(a1^s)$ $\quad [a \geq 3]$ we can again make use of (15a-d) restricting x so that the exponent of 2 is zero and choosing the first part of each partition to be a leading to

$$(q = k+2-a, \quad \ell - k \geq 3-a, \quad k \geq a+p-1, \quad \ell \geq p+2 \quad), \qquad \sum_{p=0}^{1} \langle a1^{\ell-p-2}\rangle \tag{20a}$$

$$(q = k+1-a, \quad \ell - k \geq 1-a, \quad k \geq a+p-1, \quad \ell \geq p+1 \quad), \qquad \sum_{p=0}^{1} \langle a1^{\ell-p-1}\rangle \tag{20b}$$

$$(q = k+1-a, \quad \ell - k \geq 2-a, \quad k \geq a+p, \quad \ell \geq p+1 \quad), \qquad \sum_{p=0}^{1} \langle a1^{\ell-p-1}\rangle \tag{20c}$$

$$(q = k-a, \quad \ell - k \geq -a, \quad k \geq a+p, \quad \ell \geq p \quad), \qquad \sum_{p=0}^{1} \langle a1^{\ell-p}\rangle \tag{20d}$$

where again each expression is preceded by the relevant constraints.

As an example, consider the determination of the string of partitions associated with $a = 3$ for the reduced product $\langle 2\rangle \circ \langle 1^3\rangle$. In (20a) we have $k \geq a+p-1$ requiring that $2 \geq 3+p-1$ which restricts to $p = 0$ giving just the term $\langle 31\rangle$. Similarly the constraints in (20b) also restricts p to $p = 1$ and a single term $\langle 31^2\rangle$ is obtained. The constraints in (20c) and (20d) cannot be satisfied and hence the string consists of just

$$\langle 2\rangle \circ \langle 1^3\rangle \supset \langle 31\rangle + \langle 31^2\rangle \tag{21}$$

The same result could have been reached by decorating the two shapes thus

$$\underset{(a)}{\begin{array}{lll}\star & \bullet & \diamond \\ \bullet & & \end{array}} \qquad \underset{(b)}{\begin{array}{lll}\star & \star & \bullet \\ \bullet & & \\ \bullet & & \end{array}} \tag{21'}$$

Finally we consider the generic shapes $a2^r1^s$ with $a \geq 3$. Again, it suffices to return to (15a-d) and to identify the first part of the partitions in each of the four terms with a and to satisfy the constraints to determine the strings of shapes associated with the generic shape. Thus

$$(q = k+2-a, \quad \ell - k \geq 2+x-a, \quad k \geq a+p+x-2, \quad \ell \geq p+2x, \quad x \geq 2) \sum_{p=0}^{1} \langle a2^{x-1}1^{\ell-p-2x} \rangle \tag{22a}$$

$$(q = k+1-a, \quad \ell - k \geq 1+x-a, \quad k \geq a+p+x-1, \quad \ell \geq p+2x+1, \quad x \geq 1) \sum_{p=0}^{1} \langle a2^{x}1^{\ell-p-2x-1} \rangle \tag{22b}$$

$$(q = k+1-a, \quad \ell - k \geq 1+x-a, \quad k \geq a+p+x-1, \quad \ell \geq p+2x-1, \quad x \geq 2) \sum_{p=0}^{1} \langle a2^{x-1}1^{\ell-p-2x+1} \rangle \tag{22c}$$

$$(q = k-a, \quad \ell - k \geq x-a, \quad k \geq a+p+x, \quad \ell \geq p+2x, \quad x \geq 1) \sum_{p=0}^{1} \langle a2^{x}1^{\ell-p-2x} \rangle \tag{22d}$$

As an example consider the reduced product $\langle 4 \rangle \circ \langle 1^5 \rangle$ and the strings associated with the generic terms $\langle 32^r1^s \rangle$. In the case of (22a) the constraints lead to just $x = 2$ and $p = 0, 1$ and hence the string $\langle 32 \rangle + \langle 321 \rangle$. For (20b) the constraint $2 - p \geq x$ gives $x = 1, p = 0, 1$ and $x = 2, p = 0$ and thus to the string $\langle 321 \rangle + \langle 321^2 \rangle + \langle 32^2 \rangle$ while (20c) yields just the term $\langle 321^2 \rangle$ due to the constraints $x = 2, p = 0$. Finally, (20d) has the constraint $1 - p \geq x$ which can only be satisfied for $x = 1, p = 0$ giving rise to the single term $\langle 321^3 \rangle$ and hence

$$\langle 4 \rangle \circ \langle 1^5 \rangle \supset \langle 32 \rangle + 2\langle 321 \rangle + 2\langle 321^2 \rangle + \langle 321^3 \rangle + \langle 32^2 \rangle \tag{23}$$

Again we could have deduced the same results by following the decoration rules to produce the seven decorated shapes below

$$\underset{(a)}{\begin{array}{lll}\star & \bullet & \diamond \\ \bullet & \diamond & \end{array}} \quad \underset{(b)}{\begin{array}{lll}\star & \bullet & \diamond \\ \bullet & \diamond & \\ \diamond & & \end{array}} \quad \underset{(c)}{\begin{array}{lll}\star & \star & \bullet \\ \bullet & \diamond & \\ \bullet & & \end{array}} \quad \underset{(d)}{\begin{array}{lll}\star & \star & \diamond \\ \bullet & \diamond & \\ \bullet & & \\ \bullet & & \end{array}} \quad \underset{(d)}{\begin{array}{lll}\star & \star & \bullet \\ \bullet & \diamond & \\ \bullet & & \\ \diamond & & \end{array}} \quad \underset{(e)}{\begin{array}{lll}\star & \star & \star \\ \bullet & \diamond & \\ \bullet & & \\ \bullet & & \\ \bullet & & \end{array}} \quad \underset{(f)}{\begin{array}{lll}\star & \star & \bullet \\ \bullet & \diamond & \\ \bullet & \diamond & \end{array}}$$

This completes our analysis of the reduced Kronecker products for an arbitrary row with an arbitrary column. In terms of the symmetric group S_n this amounts to resolving the Kronecker product of a two-row representation with a single hook representation in an essentially $n-$independent manner. We now turn to the reduced product of two arbitary columns corresponding in S_n to resolving the Kronecker product of two single hook representations.

The reduced Kronecker products $\langle 1^k \rangle \circ \langle 1^k \rangle$

Recall (4c) and throughout we shall take $k \geq \ell$.

$$\langle 1^k \rangle \circ \langle 1^\ell \rangle = \sum_{p=0}^{\ell} \sum_{q=0}^{p} \langle 1^{k-p} \cdot 1^\ell \cdot p - q \rangle = \sum_{\nu} g^\nu \langle \nu \rangle \tag{24}$$

Note the similarity between (10) and (24). As a result there are again just four generic shapes corresponding to the four partition types:-

$$(a2^r1^s) \qquad [a \geq 3], \qquad (a1^s) \qquad [a \geq 3], \qquad (2^r1^s), \qquad (1^s) \tag{11}$$

Application of the Littlewood-Richardson rule leads to the following decoration rules:-

1. *Draw the shape for* $\langle\nu\rangle$ *as a standard left adjusted Young frame.*
2. *Place* $k-p$ $\star$ *in the first column starting with the topmost cell of the shape.*
3. *Place* $\ell-p$ $\bullet$ *in the first two columns with the restriction that the* $\bullet$ *in the first column must be below those of* $\star$ *and in the second column no* $\bullet$ *appears adjacent to a* $\bullet$ *in the first column.*
4. *The* $p-q$ *symbols* $\diamond$ *can only be placed in the bottom most cells of the first and second columns and/or in the top row beyond* $\star$ *and* $\bullet$.
5. *The multiplicity* $g^{\langle\nu\rangle}_{\langle 1^k\rangle\circ\langle 1^\ell\rangle}$ *is the number of independent decorations of the shape of* $\langle\nu\rangle$.

Let us at first consider some specific cases.

Single column $\langle 1^s\rangle$

Application of the above rules leads to

$$k+\ell \geq s \geq k-\ell \tag{25a}$$
$$g^{\langle 1^s\rangle} = 1 \tag{25b}$$

Single row $\langle a\rangle$

The possibilities of producing a single row are limited to

$$\langle 1\cdot 1\cdot p-q\rangle \text{ only if } k=\ell,\ p=\ell-1,\ \ell+1\geq a\geq 2 \tag{26a}$$
$$\langle 0\cdot 0\cdot p-q\rangle \text{ only if } k=\ell,\ p=\ell,\ \ell\geq a\geq 0 \tag{26b}$$
$$\langle 1\cdot 0\cdot p-q\rangle \text{ only if } k=\ell+1,\ p=\ell,\ \ell\geq a\geq 1 \tag{26c}$$

From which we deduce

$$\text{If } k=\ell\ g^{\langle a\rangle} = \begin{cases} 1 & \text{if } a=0,1,\ell+1,, \\ 2 & \text{if } \ell\geq a\geq 2, \end{cases} \tag{27a}$$

$$\text{If } k=\ell+1\ g^{\langle a\rangle} = 1\ if\ \ell\geq a\geq 1. \tag{27b}$$

Rectangular shapes $\langle 2^r\rangle$

Consideration of decorating two adjacent columns of equal length leads to

$$\text{If } k=\ell\ g^{\langle 2^r\rangle} = \begin{cases} 1 & \text{if } r=k, \\ 2 & \text{if } k-1\geq r\geq 0, \end{cases} \tag{28a}$$

$$\text{If } k=\ell\ g^{\langle 2^r\rangle} = 1\ \ell\geq r\geq 2 \tag{28b}$$

Single hook shapes $\langle a1^s\rangle$

These divide into four types of decorations:-

$$\begin{array}{llll} \star & \diamond & \ldots & \diamond \\ \star \\ \vdots \\ \star \\ \bullet \\ \vdots \\ \bullet \\ \\ \\ (a) \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} \star & \bullet & \diamond & \ldots & \diamond \\ \star \\ \vdots \\ \star \\ \bullet \\ \vdots \\ \bullet \\ \diamond \\ \\ (b) \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \star & \diamond & \ldots & \diamond \\ \star \\ \vdots \\ \star \\ \bullet \\ \vdots \\ \bullet \\ \diamond \\ \\ (c) \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} \star & \bullet & \diamond & \ldots & \diamond \\ \star \\ \vdots \\ \star \\ \bullet \\ \vdots \\ \bullet \\ \\ \\ (d) \end{array}$$

Consideration of each of the decorations ((a) to (d)) leads to

$$(a) \quad a=p-q+1, \quad s=k+\ell-2p-1 \quad 2p=k+\ell-s-1 \tag{29a}$$
$$(b) \quad a=p-q+1, \quad s=k+\ell-2p-1 \quad 2p=k+\ell-s-1 \tag{29b}$$
$$(c) \quad a=p-q \quad , \quad s=k+\ell-2p \quad 2p=k+\ell-s \tag{29c}$$
$$(d) \quad a=p-q+2, \quad s=k+\ell-2p-2 \quad 2p=k+\ell-s-2 \tag{29d}$$

The above implies that we have cases (a) and/or (b) if $k+\ell$ and s are of the same parity otherwise cases (c) and/or (d) and hence

$$2 \geq g^{\langle a1^s \rangle} \geq 0 \tag{30}$$

In using the above results one must also recall the restrictions of (9a) and (9b). Thus for $\langle 1^4 \rangle \circ \langle 1^2 \rangle$ the only consistent decoration of the shapes (31) and (31^2) are

$$\begin{array}{lll} \star & \diamond & \diamond \\ \star & & \\ & & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \star & \diamond & \diamond \\ \star & & \\ \diamond & & \end{array}$$

$$(31) \qquad\qquad (31^2)$$

These two example belong to types (a) and (c) respectively.

Arbitrary shapes $(a2^r1^s)$

There are four distinct decorations for these shapes:-

$$\begin{array}{llll} \star & \bullet & \diamond & \ldots\diamond \\ \star & \bullet & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \star & \bullet & & \\ \bullet & & & \\ \vdots & & & \\ \bullet & & & \\ & & & \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \star & \bullet & \diamond & \ldots\diamond \\ \star & \bullet & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \star & \bullet & & \\ \bullet & & & \\ \vdots & & & \\ \bullet & & & \\ \diamond & & & \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \star & \bullet & \diamond & \ldots\diamond \\ \star & \bullet & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \star & \bullet & & \\ \bullet & \diamond & & \\ \vdots & & & \\ \bullet & & & \\ & & & \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \star & \bullet & \diamond & \ldots\diamond \\ \star & \bullet & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \star & \bullet & & \\ \bullet & \diamond & & \\ \vdots & & & \\ \bullet & & & \\ \diamond & & & \end{array}$$

$$(a) \qquad\qquad (b) \qquad\qquad (c) \qquad\qquad (d) \tag{31}$$

Alternatively, from the Littlewood-Richardson rule we have (for $k \geq \ell$)

$$\{1^{k-p} \cdot 1^{\ell-p}\} = \sum_{x=0}^{\ell-p} \{2^x 1^{k+\ell-2p-2x}\} \tag{32}$$

with each term of a different weight and the product is multiplicity free. Using the Littlewood-Richardson rule again gives

$$\begin{aligned} \langle 1^{k-p} \cdot 1^{\ell-p} \cdot p-q \rangle = & \sum_{x=0}^{\ell-p} \big\{ \langle 2+p-q, 2^{x-1}, 1^{k+\ell-2p-2x} \rangle + \langle 1-p-q, 2^{x-1}, 1^{k+\ell-2p-2x+1} \rangle \\ & \langle 1+p-q, 2^x, 1^{k+\ell-2p-2x-1} \rangle + \langle p-q, 2^x, 1^{k+\ell-2p-2x} \rangle \big\} \end{aligned} \tag{33}$$

where the four terms enclosed in braces are given in the same order as in (31). Inspection of (33) immediately shows that the multiplicities of any allowed shape cannot exceed 2 as conjectured from inspection of the tables.

As an example consider the evaluation of the coefficient $g_{\langle 1^6 \rangle \langle 1^6 \rangle}^{\langle 32^2 1^3 \rangle}$. Since the exponent of the parts of length 1 is *odd* only cases (b) and (c) need be considered. We have for these two cases from (33)

$$(b) \qquad p-q=2, \qquad x=3, \qquad p=2 \tag{34a}$$

$$(c) \qquad p-q=2, \qquad x=2, \qquad p=2 \tag{34b}$$

Furthermore,the restrictions (8) to (9) are satisfied by both solutions and hence $g_{\langle 1^6 \rangle \langle 1^6 \rangle}^{\langle 32^2 1^3 \rangle} = 2$ as indeed corresponds to the two possible decorations

$$\begin{array}{lll} \star & \bullet & \diamond \\ \star & \bullet & \\ \star & \bullet & \\ \star & & \\ \bullet & & \\ \diamond & & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \star & \bullet & \diamond \\ \star & \bullet & \\ \star & \diamond & \\ \star & & \\ \bullet & & \\ \bullet & & \end{array}$$

$$(b) \qquad\qquad (c) \tag{35}$$

Now consider the coefficient $g^{\langle 42^21^2\rangle}_{\langle 1^6\rangle\langle 1^6\rangle}$. In this case the exponent of the parts of unit length is *even* and only (a) and (d) need be considered but it is readily seen that (d) leads to contradictions and only (a) is possible and hence $g^{\langle 42^21^2\rangle}_{\langle 1^6\rangle\langle 1^6\rangle} = 1$ as seen by the decoration

$$\begin{array}{llll} \star & \bullet & \diamond & \diamond \\ \star & \bullet & & \\ \star & \bullet & & \\ \star & & & \\ \star & & & \\ \bullet & & & \end{array}$$

$$(a) \tag{36}$$

The reduced Kronecker products $\langle k\rangle \circ \langle \ell\rangle$

These have already been partially considered in references[5,8,9]. Recall (4a) and throughout we take $k \geq \ell$.

$$\langle k\rangle \circ \langle \ell\rangle = \sum_{p=0}^{\min(k,\ell)} \sum_{q=0}^{p} \langle k-p \cdot \ell-p \cdot p-q\rangle = \sum_{\nu} g^{\langle\nu\rangle}\langle\nu\rangle \tag{37}$$

Application of the Littlewood-Richardson rule leads to the following decoration rules:-

1. *Draw the shape for $\langle\nu\rangle$ as a standard left adjusted Young frame.*
2. *Place $k-p$ $\star$ in the first row starting from the leftmost cell.*
3. *Place $\ell-p$ $\bullet$ in the first and second rows. Those in the second row start from the leftmost cell while those in the first row must be placed to the right of any $\star$ and such that no $\bullet$ occur in the same column.*
4. *place $p-q$ $\diamond$ in the first, second and third rows such that the $\diamond$ are always to the right of any $\star$ or $\bullet$ with no $\diamond$ occurring in the same column.*
5. *The multiplicity $g^{\langle\nu\rangle}_{\langle k\rangle\circ\langle\ell\rangle}$ is the number of independent decorations of the shape of $\langle\nu\rangle$.* As an example consider the coefficient of $\langle 921\rangle$ in the reduced Kronecker product $\langle 8\rangle \circ \langle 8\rangle$. Following the above rules we readily find the four decorations

$$\begin{array}{l} \star\star\star\star\bullet\bullet\bullet\diamond\diamond \\ \bullet\,\diamond \\ \diamond \\ \\ (a) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \star\star\star\star\bullet\bullet\diamond\diamond\diamond \\ \bullet\,\bullet \\ \diamond \\ \\ (b) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \star\star\star\star\bullet\bullet\bullet\bullet\diamond \\ \bullet\,\bullet \\ \diamond \\ \\ (c) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \star\star\star\star\star\bullet\bullet\bullet\diamond \\ \bullet\,\diamond \\ \diamond \\ \\ (d) \end{array}$$

from which we deduce that the coefficient is 4. For further examples and a discussion of of the unimodality of certain multiplicity distributions see reference[5].

Acknowledgement

Much of the work reported here was done during a stay in the Wojewódzkiego Szpital of Torun. I record my appreciation of the doctors and staff.I am also grateful to Luisa Carini for asking relevant questions.

References

1. Murnaghan F D 1938 *Am. J. Math.***60** 761-84
2. Littlewood D E 1958a *Can. J. Math.* **10** 1-16
   1956b *Can. J. Math.* **10** 17-32
3. Butler P H and King R C 1973 *J. Math. Phys.* **14** 1176-83
4. Thibon J-Y 1991 *J. Alg. Comput.***1** 207-21
5. Scharf T, J-Y Thibon and Wybourne B G 1993 *J Phys A: Math. Gen.* **26** 7461-78
6. Scharf T, J-Y Thibon and Wybourne B G 1997 *J Phys A: Math. Gen.* **30** 6963-75
7. Littlewood D E 1950 *The theory of group characters* 2edn (Oxford : Clarendon)
8. Remmel J B 1989 *J. Alg.* **120** 100-18
9. Remmel J B and Whitehead T 1994 *Belgian Math. Soc. Bull.***(1)** 649-683

Tables of reduced inner products

The tables below give all the reduced inner products where $k, \ell \leq 6$

Table I. Reduced inner products $\langle k\rangle \circ \langle \ell\rangle$

$\langle 1\rangle \circ \langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$+ \langle 1\rangle$	$+ \langle 1^2\rangle$	$+ \langle 2\rangle$	
$\langle 2\rangle \circ \langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$+ \langle 1^2\rangle$	$+ \langle 2\rangle$	$+ \langle 21\rangle$	$+ \langle 3\rangle$
$\langle 2\rangle \circ \langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$+ \langle 1\rangle$	$+ \langle 1^2\rangle$	$+ \langle 1^3\rangle$	$+ 2\langle 2\rangle$
	$+ 2\langle 21\rangle$	$+ \langle 2^2\rangle$	$+ \langle 3\rangle$	$+ \langle 31\rangle$	$+ \langle 4\rangle$
$\langle 3\rangle \circ \langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$+ \langle 21\rangle$	$+ \langle 3\rangle$	$+ \langle 31\rangle$	$+ \langle 4\rangle$
$\langle 3\rangle \circ \langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$+ \langle 1^2\rangle$	$+ \langle 2\rangle$	$+ 2\langle 21\rangle$	$+ \langle 21^2\rangle$
	$+ \langle 2^2\rangle$	$+ 2\langle 3\rangle$	$+ 2\langle 31\rangle$	$+ \langle 32\rangle$	$+ \langle 4\rangle$
	$+ \langle 41\rangle$	$+ \langle 5\rangle$			
$\langle 3\rangle \circ \langle 3\rangle$	$\langle 0\rangle$	$+ \langle 1\rangle$	$+ \langle 1^2\rangle$	$+ \langle 1^3\rangle$	$+ 2\langle 2\rangle$
	$+ 2\langle 21\rangle$	$+ \langle 21^2\rangle$	$+ 2\langle 2^2\rangle$	$+ \langle 2^21\rangle$	$+ 2\langle 3\rangle$
	$+ 3\langle 31\rangle$	$+ \langle 31^2\rangle$	$+ 2\langle 32\rangle$	$+ \langle 3^2\rangle$	$+ 2\langle 4\rangle$
	$+ 2\langle 41\rangle$	$+ \langle 42\rangle$	$+ \langle 5\rangle$	$+ \langle 51\rangle$	$+ \langle 6\rangle$
$\langle 4\rangle \circ \langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle$	$+ \langle 31\rangle$	$+ \langle 4\rangle$	$+ \langle 41\rangle$	$+ \langle 5\rangle$
$\langle 4\rangle \circ \langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$+ \langle 21\rangle$	$+ \langle 2^2\rangle$	$+ \langle 3\rangle$	$+ 2\langle 31\rangle$
	$+ \langle 31^2\rangle$	$+ \langle 32\rangle$	$+ 2\langle 4\rangle$	$+ 2\langle 41\rangle$	$+ \langle 42\rangle$
	$+ \langle 5\rangle$	$+ \langle 51\rangle$	$+ \langle 6\rangle$		
$\langle 4\rangle \circ \langle 3\rangle$	$\langle 1\rangle$	$+ \langle 1^2\rangle$	$+ \langle 2\rangle$	$+ 2\langle 21\rangle$	$+ \langle 21^2\rangle$
	$+ \langle 2^2\rangle$	$+ \langle 2^21\rangle$	$+ 2\langle 3\rangle$	$+ 3\langle 31\rangle$	$+ \langle 31^2\rangle$
	$+ 3\langle 32\rangle$	$+ \langle 321\rangle$	$+ \langle 3^2\rangle$	$+ 2\langle 4\rangle$	$+ 3\langle 41\rangle$
	$+ \langle 41^2\rangle$	$+ 2\langle 42\rangle$	$+ \langle 43\rangle$	$+ 2\langle 5\rangle$	$+ 2\langle 51\rangle$
	$+ \langle 52\rangle$	$+ \langle 6\rangle$	$+ \langle 61\rangle$	$+ \langle 7\rangle$	
$\langle 4\rangle \circ \langle 4\rangle$	$\langle 0\rangle$	$+ \langle 1\rangle$	$+ \langle 1^2\rangle$	$+ \langle 1^3\rangle$	$+ 2\langle 2\rangle$
	$+ 2\langle 21\rangle$	$+ \langle 21^2\rangle$	$+ 2\langle 2^2\rangle$	$+ \langle 2^21\rangle$	$+ \langle 2^3\rangle$
	$+ 2\langle 3\rangle$	$+ 3\langle 31\rangle$	$+ 2\langle 31^2\rangle$	$+ 3\langle 32\rangle$	$+ 2\langle 321\rangle$
	$+ 2\langle 3^2\rangle$	$+ \langle 3^21\rangle$	$+ 3\langle 4\rangle$	$+ 4\langle 41\rangle$	$+ \langle 41^2\rangle$
	$+ 4\langle 42\rangle$	$+ \langle 421\rangle$	$+ 2\langle 43\rangle$	$+ \langle 4^2\rangle$	$+ 2\langle 5\rangle$
	$+ 3\langle 51\rangle$	$+ \langle 51^2\rangle$	$+ 2\langle 52\rangle$	$+ \langle 53\rangle$	$+ 2\langle 6\rangle$
	$+ 2\langle 61\rangle$	$+ \langle 62\rangle$	$+ \langle 7\rangle$	$+ \langle 71\rangle$	$+ \langle 8\rangle$
$\langle 5\rangle \circ \langle 1\rangle$	$\langle 4\rangle$	$+ \langle 41\rangle$	$+ \langle 5\rangle$	$+ \langle 51\rangle$	$+ \langle 6\rangle$
$\langle 5\rangle \circ \langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$	$+ \langle 31\rangle$	$+ \langle 32\rangle$	$+ \langle 4\rangle$	$+ 2\langle 41\rangle$
	$+ \langle 41^2\rangle$	$+ \langle 42\rangle$	$+ 2\langle 5\rangle$	$+ 2\langle 51\rangle$	$+ \langle 52\rangle$
	$+ \langle 6\rangle$	$+ \langle 61\rangle$	$+ \langle 7\rangle$		
$\langle 5\rangle \circ \langle 3\rangle$	$\langle 2\rangle$	$+ \langle 21\rangle$	$+ \langle 2^2\rangle$	$+ \langle 3\rangle$	$+ 2\langle 31\rangle$
	$+ \langle 31^2\rangle$	$+ 2\langle 32\rangle$	$+ \langle 321\rangle$	$+ \langle 3^2\rangle$	$+ 2\langle 4\rangle$
	$+ 3\langle 41\rangle$	$+ \langle 41^2\rangle$	$+ 3\langle 42\rangle$	$+ \langle 421\rangle$	$+ \langle 43\rangle$
	$+ 2\langle 5\rangle$	$+ 3\langle 51\rangle$	$+ \langle 51^2\rangle$	$+ 2\langle 52\rangle$	$+ \langle 53\rangle$
	$+ 2\langle 6\rangle$	$+ 2\langle 61\rangle$	$+ \langle 62\rangle$	$+ \langle 7\rangle$	$+ \langle 71\rangle$
	$+ \langle 8\rangle$				

$\langle 5\rangle \circ \langle 4\rangle$	$\langle 1\rangle$	$+\ \langle 1^2\rangle$	$+\ \langle 2\rangle$	$+\ 2\langle 21\rangle$	$+\ \langle 21^2\rangle$
	$+\ \langle 2^2\rangle$	$+\ \langle 2^2 1\rangle$	$+\ 2\langle 3\rangle$	$+\ 3\langle 31\rangle$	$+\ \langle 31^2\rangle$
	$+\ 3\langle 32\rangle$	$+\ 2\langle 321\rangle$	$+\ \langle 32^2\rangle$	$+\ 2\langle 3^2\rangle$	$+\ \langle 3^2 1\rangle$
	$+\ 2\langle 4\rangle$	$+\ 4\langle 41\rangle$	$+\ 2\langle 41^2\rangle$	$+\ 4\langle 42\rangle$	$+\ 2\langle 421\rangle$
	$+\ 3\langle 43\rangle$	$+\ \langle 431\rangle$	$+\ \langle 4^2\rangle$	$+\ 3\langle 5\rangle$	$+\ 4\langle 51\rangle$
	$+\ \langle 51^2\rangle$	$+\ 4\langle 52\rangle$	$+\ \langle 521\rangle$	$+\ 2\langle 53\rangle$	$+\ \langle 54\rangle$
	$+\ 2\langle 6\rangle$	$+\ 3\langle 61\rangle$	$+\ \langle 61^2\rangle$	$+\ 2\langle 62\rangle$	$+\ \langle 63\rangle$
	$+\ 2\langle 7\rangle$	$+\ 2\langle 71\rangle$	$+\ \langle 72\rangle$	$+\ \langle 8\rangle$	$+\ \langle 81\rangle$
	$+\ \langle 9\rangle$				
$\langle 5\rangle \circ \langle 5\rangle$	$\langle 0\rangle$	$+\ \langle 1\rangle$	$+\ \langle 1^2\rangle$	$+\ \langle 1^3\rangle$	$+\ 2\langle 2\rangle$
	$+\ 2\langle 21\rangle$	$+\ \langle 21^2\rangle$	$+\ 2\langle 2^2\rangle$	$+\ \langle 2^2 1\rangle$	$+\ \langle 2^3\rangle$
	$+\ 2\langle 3\rangle$	$+\ 3\langle 31\rangle$	$+\ 2\langle 31^2\rangle$	$+\ 3\langle 32\rangle$	$+\ 2\langle 321\rangle$
	$+\ \langle 32^2\rangle$	$+\ 2\langle 3^2\rangle$	$+\ 2\langle 3^2 1\rangle$	$+\ \langle 3^2 2\rangle$	$+\ 3\langle 4\rangle$
	$+\ 4\langle 41\rangle$	$+\ 2\langle 41^2\rangle$	$+\ 5\langle 42\rangle$	$+\ 3\langle 421\rangle$	$+\ \langle 42^2\rangle$
	$+\ 4\langle 43\rangle$	$+\ 2\langle 431\rangle$	$+\ 2\langle 4^2\rangle$	$+\ \langle 4^2 1\rangle$	$+\ 3\langle 5\rangle$
	$+\ 5\langle 51\rangle$	$+\ 2\langle 51^2\rangle$	$+\ 5\langle 52\rangle$	$+\ 2\langle 521\rangle$	$+\ 4\langle 53\rangle$
	$+\ \langle 531\rangle$	$+\ 2\langle 54\rangle$	$+\ \langle 5^2\rangle$	$+\ 3\langle 6\rangle$	$+\ 4\langle 61\rangle$
	$+\ \langle 61^2\rangle$	$+\ 4\langle 62\rangle$	$+\ \langle 621\rangle$	$+\ 2\langle 63\rangle$	$+\ \langle 64\rangle$
	$+\ 2\langle 7\rangle$	$+\ 3\langle 71\rangle$	$+\ \langle 71^2\rangle$	$+\ 2\langle 72\rangle$	$+\ \langle 73\rangle$
	$+\ 2\langle 8\rangle$	$+\ 2\langle 81\rangle$	$+\ \langle 82\rangle$	$+\ \langle 9\rangle$	$+\ \langle 91\rangle$
	$+\ \langle 10\ \rangle$				
$\langle 6\rangle \circ \langle 1\rangle$	$\langle 5\rangle$	$+\ \langle 51\rangle$	$+\ \langle 6\rangle$	$+\ \langle 61\rangle$	$+\ \langle 7\rangle$
$\langle 6\rangle \circ \langle 2\rangle$	$\langle 4\rangle$	$+\ \langle 41\rangle$	$+\ \langle 42\rangle$	$+\ \langle 5\rangle$	$+\ 2\langle 51\rangle$
	$+\ \langle 51^2\rangle$	$+\ \langle 52\rangle$	$+\ 2\langle 6\rangle$	$+\ 2\langle 61\rangle$	$+\ \langle 62\rangle$
	$+\ \langle 7\rangle$	$+\ \langle 71\rangle$	$+\ \langle 8\rangle$		
$\langle 6\rangle \circ \langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$+\ \langle 31\rangle$	$+\ \langle 32\rangle$	$+\ \langle 3^2\rangle$	$+\ \langle 4\rangle$
	$+\ 2\langle 41\rangle$	$+\ \langle 41^2\rangle$	$+\ 2\langle 42\rangle$	$+\ \langle 421\rangle$	$+\ \langle 43\rangle$
	$+\ 2\langle 5\rangle$	$+\ 3\langle 51\rangle$	$+\ \langle 51^2\rangle$	$+\ 3\langle 52\rangle$	$+\ \langle 521\rangle$
	$+\ \langle 53\rangle$	$+\ 2\langle 6\rangle$	$+\ 3\langle 61\rangle$	$+\ \langle 61^2\rangle$	$+\ 2\langle 62\rangle$
	$+\ \langle 63\rangle$	$+\ 2\langle 7\rangle$	$+\ 2\langle 71\rangle$	$+\ \langle 72\rangle$	$+\ \langle 8\rangle$
	$+\ \langle 81\rangle$	$+\ \langle 9\rangle$			
$\langle 6\rangle \circ \langle 4\rangle$	$\langle 2\rangle$	$+\ \langle 21\rangle$	$+\ \langle 2^2\rangle$	$+\ \langle 3\rangle$	$+\ 2\langle 31\rangle$
	$+\ \langle 31^2\rangle$	$+\ 2\langle 32\rangle$	$+\ \langle 321\rangle$	$+\ \langle 3^2\rangle$	$+\ \langle 3^2 1\rangle$
	$+\ 2\langle 4\rangle$	$+\ 3\langle 41\rangle$	$+\ \langle 41^2\rangle$	$+\ 4\langle 42\rangle$	$+\ 2\langle 421\rangle$
	$+\ \langle 42^2\rangle$	$+\ 3\langle 43\rangle$	$+\ \langle 431\rangle$	$+\ \langle 4^2\rangle$	$+\ 2\langle 5\rangle$
	$+\ 4\langle 51\rangle$	$+\ 2\langle 51^2\rangle$	$+\ 4\langle 52\rangle$	$+\ 2\langle 521\rangle$	$+\ 3\langle 53\rangle$
	$+\ \langle 531\rangle$	$+\ \langle 54\rangle$	$+\ 3\langle 6\rangle$	$+\ 4\langle 61\rangle$	$+\ \langle 61^2\rangle$
	$+\ 4\langle 62\rangle$	$+\ \langle 621\rangle$	$+\ 2\langle 63\rangle$	$+\ \langle 64\rangle$	$+\ 2\langle 7\rangle$
	$+\ 3\langle 71\rangle$	$+\ \langle 71^2\rangle$	$+\ 2\langle 72\rangle$	$+\ \langle 73\rangle$	$+\ 2\langle 8\rangle$
	$+\ 2\langle 81\rangle$	$+\ \langle 82\rangle$	$+\ \langle 9\rangle$	$+\ \langle 91\rangle$	$+\ \langle 10\ \rangle$

$\langle 6\rangle \circ \langle 5\rangle$	$\langle 1\rangle$	$+\ \langle 1^2\rangle$	$+\ \langle 2\rangle$	$+\ 2\langle 21\rangle$	$+\ \langle 21^2\rangle$
	$+\ \langle 2^2\rangle$	$+\ \langle 2^21\rangle$	$+\ 2\langle 3\rangle$	$+\ 3\langle 31\rangle$	$+\ \langle 31^2\rangle$
	$+\ 3\langle 32\rangle$	$+\ 2\langle 321\rangle$	$+\ \langle 32^2\rangle$	$+\ 2\langle 3^2\rangle$	$+\ \langle 3^21\rangle$
	$+\ \langle 3^22\rangle$	$+\ 2\langle 4\rangle$	$+\ 4\langle 41\rangle$	$+\ 2\langle 41^2\rangle$	$+\ 4\langle 42\rangle$
	$+\ 3\langle 421\rangle$	$+\ \langle 42^2\rangle$	$+\ 4\langle 43\rangle$	$+\ 3\langle 431\rangle$	$+\ \langle 432\rangle$
	$+\ 2\langle 4^2\rangle$	$+\ \langle 4^21\rangle$	$+\ 3\langle 5\rangle$	$+\ 5\langle 51\rangle$	$+\ 2\langle 51^2\rangle$
	$+\ 6\langle 52\rangle$	$+\ 3\langle 521\rangle$	$+\ \langle 52^2\rangle$	$+\ 5\langle 53\rangle$	$+\ 2\langle 531\rangle$
	$+\ 3\langle 54\rangle$	$+\ \langle 541\rangle$	$+\ \langle 5^2\rangle$	$+\ 3\langle 6\rangle$	$+\ 5\langle 61\rangle$
	$+\ 2\langle 61^2\rangle$	$+\ 5\langle 62\rangle$	$+\ 2\langle 621\rangle$	$+\ 4\langle 63\rangle$	$+\ \langle 631\rangle$
	$+\ 2\langle 64\rangle$	$+\ \langle 65\rangle$	$+\ 3\langle 7\rangle$	$+\ 4\langle 71\rangle$	$+\ \langle 71^2\rangle$
	$+\ 4\langle 72\rangle$	$+\ \langle 721\rangle$	$+\ 2\langle 73\rangle$	$+\ \langle 74\rangle$	$+\ 2\langle 8\rangle$
	$+\ 3\langle 81\rangle$	$+\ \langle 81^2\rangle$	$+\ 2\langle 82\rangle$	$+\ \langle 83\rangle$	$+\ 2\langle 9\rangle$
	$+\ 2\langle 91\rangle$	$+\ \langle 92\rangle$	$+\ \langle 10\ \rangle$	$+\ \langle 10\ 1\rangle$	$+\ \langle 11\ \rangle$
$\langle 6\rangle \circ \langle 6\rangle$	$\langle 0\rangle$	$+\ \langle 1\rangle$	$+\ \langle 1^2\rangle$	$+\ \langle 1^3\rangle$	$+\ 2\langle 2\rangle$
	$+\ 2\langle 21\rangle$	$+\ \langle 21^2\rangle$	$+\ 2\langle 2^2\rangle$	$+\ \langle 2^21\rangle$	$+\ \langle 2^3\rangle$
	$+\ 2\langle 3\rangle$	$+\ 3\langle 31\rangle$	$+\ 2\langle 31^2\rangle$	$+\ 3\langle 32\rangle$	$+\ 2\langle 321\rangle$
	$+\ \langle 32^2\rangle$	$+\ 2\langle 3^2\rangle$	$+\ 2\langle 3^21\rangle$	$+\ \langle 3^22\rangle$	$+\ \langle 3^3\rangle$
	$+\ 3\langle 4\rangle$	$+\ 4\langle 41\rangle$	$+\ 2\langle 41^2\rangle$	$+\ 5\langle 42\rangle$	$+\ 3\langle 421\rangle$
	$+\ 2\langle 42^2\rangle$	$+\ 4\langle 43\rangle$	$+\ 3\langle 431\rangle$	$+\ 2\langle 432\rangle$	$+\ 3\langle 4^2\rangle$
	$+\ 2\langle 4^21\rangle$	$+\ \langle 4^22\rangle$	$+\ 3\langle 5\rangle$	$+\ 5\langle 51\rangle$	$+\ 3\langle 51^2\rangle$
	$+\ 6\langle 52\rangle$	$+\ 4\langle 521\rangle$	$+\ \langle 52^2\rangle$	$+\ 6\langle 53\rangle$	$+\ 4\langle 531\rangle$
	$+\ \langle 532\rangle$	$+\ 4\langle 54\rangle$	$+\ 2\langle 541\rangle$	$+\ 2\langle 5^2\rangle$	$+\ \langle 5^21\rangle$
	$+\ 4\langle 6\rangle$	$+\ 6\langle 61\rangle$	$+\ 2\langle 61^2\rangle$	$+\ 7\langle 62\rangle$	$+\ 3\langle 621\rangle$
	$+\ \langle 62^2\rangle$	$+\ 6\langle 63\rangle$	$+\ 2\langle 631\rangle$	$+\ 4\langle 64\rangle$	$+\ \langle 641\rangle$
	$+\ 2\langle 65\rangle$	$+\ \langle 6^2\rangle$	$+\ 3\langle 7\rangle$	$+\ 5\langle 71\rangle$	$+\ 2\langle 71^2\rangle$
	$+\ 5\langle 72\rangle$	$+\ 2\langle 721\rangle$	$+\ 4\langle 73\rangle$	$+\ \langle 731\rangle$	$+\ 2\langle 74\rangle$
	$+\ \langle 75\rangle$	$+\ 3\langle 8\rangle$	$+\ 4\langle 81\rangle$	$+\ \langle 81^2\rangle$	$+\ 4\langle 82\rangle$
	$+\ \langle 821\rangle$	$+\ 2\langle 83\rangle$	$+\ \langle 84\rangle$	$+\ 2\langle 9\rangle$	$+\ 3\langle 91\rangle$
	$+\ \langle 91^2\rangle$	$+\ 2\langle 92\rangle$	$+\ \langle 93\rangle$	$+\ 2\langle 10\ \rangle$	$+\ 2\langle 10\ 1\rangle$
	$+\ \langle 10\ 2\rangle$	$+\ \langle 11\ \rangle$	$+\ \langle 11\ 1\rangle$	$+\ \langle 12\ \rangle$	
$\langle 7\rangle \circ \langle 1\rangle$	$\langle 6\rangle$	$+\ \langle 61\rangle$	$+\ \langle 7\rangle$	$+\ \langle 71\rangle$	$+\ \langle 8\rangle$
$\langle 7\rangle \circ \langle 2\rangle$	$\langle 5\rangle$	$+\ \langle 51\rangle$	$+\ \langle 52\rangle$	$+\ \langle 6\rangle$	$+\ 2\langle 61\rangle$
	$+\ \langle 61^2\rangle$	$+\ \langle 62\rangle$	$+\ 2\langle 7\rangle$	$+\ 2\langle 71\rangle$	$+\ \langle 72\rangle$
	$+\ \langle 8\rangle$	$+\ \langle 81\rangle$	$+\ \langle 9\rangle$		
$\langle 7\rangle \circ \langle 3\rangle$	$\langle 4\rangle$	$+\ \langle 41\rangle$	$+\ \langle 42\rangle$	$+\ \langle 43\rangle$	$+\ \langle 5\rangle$
	$+\ 2\langle 51\rangle$	$+\ \langle 51^2\rangle$	$+\ 2\langle 52\rangle$	$+\ \langle 521\rangle$	$+\ \langle 53\rangle$
	$+\ 2\langle 6\rangle$	$+\ 3\langle 61\rangle$	$+\ \langle 61^2\rangle$	$+\ 3\langle 62\rangle$	$+\ \langle 621\rangle$
	$+\ \langle 63\rangle$	$+\ 2\langle 7\rangle$	$+\ 3\langle 71\rangle$	$+\ \langle 71^2\rangle$	$+\ 2\langle 72\rangle$
	$+\ \langle 73\rangle$	$+\ 2\langle 8\rangle$	$+\ 2\langle 81\rangle$	$+\ \langle 82\rangle$	$+\ \langle 9\rangle$
	$+\ \langle 91\rangle$	$+\ \langle 10\ \rangle$			
$\langle 7\rangle \circ \langle 4\rangle$	$\langle 3\rangle$	$+\ \langle 31\rangle$	$+\ \langle 32\rangle$	$+\ \langle 3^2\rangle$	$+\ \langle 4\rangle$
	$+\ 2\langle 41\rangle$	$+\ \langle 41^2\rangle$	$+\ 2\langle 42\rangle$	$+\ \langle 421\rangle$	$+\ 2\langle 43\rangle$
	$+\ \langle 431\rangle$	$+\ \langle 4^2\rangle$	$+\ 2\langle 5\rangle$	$+\ 3\langle 51\rangle$	$+\ \langle 51^2\rangle$
	$+\ 4\langle 52\rangle$	$+\ 2\langle 521\rangle$	$+\ \langle 52^2\rangle$	$+\ 3\langle 53\rangle$	$+\ \langle 531\rangle$
	$+\ \langle 54\rangle$	$+\ 2\langle 6\rangle$	$+\ 4\langle 61\rangle$	$+\ 2\langle 61^2\rangle$	$+\ 4\langle 62\rangle$
	$+\ 2\langle 621\rangle$	$+\ 3\langle 63\rangle$	$+\ \langle 631\rangle$	$+\ \langle 64\rangle$	$+\ 3\langle 7\rangle$
	$+\ 4\langle 71\rangle$	$+\ \langle 71^2\rangle$	$+\ 4\langle 72\rangle$	$+\ \langle 721\rangle$	$+\ 2\langle 73\rangle$
	$+\ \langle 74\rangle$	$+\ 2\langle 8\rangle$	$+\ 3\langle 81\rangle$	$+\ \langle 81^2\rangle$	$+\ 2\langle 82\rangle$
	$+\ \langle 83\rangle$	$+\ 2\langle 9\rangle$	$+\ 2\langle 91\rangle$	$+\ \langle 92\rangle$	$+\ \langle 10\ \rangle$
	$+\ \langle 10\ 1\rangle$	$+\ \langle 11\ \rangle$			

$\langle 7\rangle \circ \langle 5\rangle$	$\langle 2\rangle$	$+ \langle 21\rangle$	$+ \langle 2^2\rangle$	$+ \langle 3\rangle$	$+ 2\langle 31\rangle$
	$+ \langle 31^2\rangle$	$+ 2\langle 32\rangle$	$+ \langle 321\rangle$	$+ \langle 3^2\rangle$	$+ \langle 3^21\rangle$
	$+ 2\langle 4\rangle$	$+ 3\langle 41\rangle$	$+ \langle 41^2\rangle$	$+ 4\langle 42\rangle$	$+ 2\langle 421\rangle$
	$+ \langle 42^2\rangle$	$+ 3\langle 43\rangle$	$+ 2\langle 431\rangle$	$+ \langle 432\rangle$	$+ 2\langle 4^2\rangle$
	$+ \langle 4^21\rangle$	$+ 2\langle 5\rangle$	$+ 4\langle 51\rangle$	$+ 2\langle 51^2\rangle$	$+ 5\langle 52\rangle$
	$+ 3\langle 521\rangle$	$+ \langle 52^2\rangle$	$+ 5\langle 53\rangle$	$+ 3\langle 531\rangle$	$+ \langle 532\rangle$
	$+ 3\langle 54\rangle$	$+ \langle 541\rangle$	$+ \langle 5^2\rangle$	$+ 3\langle 6\rangle$	$+ 5\langle 61\rangle$
	$+ 2\langle 61^2\rangle$	$+ 6\langle 62\rangle$	$+ 3\langle 621\rangle$	$+ \langle 62^2\rangle$	$+ 5\langle 63\rangle$
	$+ 2\langle 631\rangle$	$+ 3\langle 64\rangle$	$+ \langle 641\rangle$	$+ \langle 65\rangle$	$+ 3\langle 7\rangle$
	$+ 5\langle 71\rangle$	$+ 2\langle 71^2\rangle$	$+ 5\langle 72\rangle$	$+ 2\langle 721\rangle$	$+ 4\langle 73\rangle$
	$+ \langle 731\rangle$	$+ 2\langle 74\rangle$	$+ \langle 75\rangle$	$+ 3\langle 8\rangle$	$+ 4\langle 81\rangle$
	$+ \langle 81^2\rangle$	$+ 4\langle 82\rangle$	$+ \langle 821\rangle$	$+ 2\langle 83\rangle$	$+ \langle 84\rangle$
	$+ 2\langle 9\rangle$	$+ 3\langle 91\rangle$	$+ \langle 91^2\rangle$	$+ 2\langle 92\rangle$	$+ \langle 93\rangle$
	$+ 2\langle 10\ \rangle$	$+ 2\langle 10\ 1\rangle$	$+ \langle 10\ 2\rangle$	$+ \langle 11\ \rangle$	$+ \langle 11\ 1\rangle$
$\langle 7\rangle \circ \langle 6\rangle$	$\langle 1\rangle$	$+ \langle 1^2\rangle$	$+ \langle 2\rangle$	$+ 2\langle 21\rangle$	$+ \langle 21^2\rangle$
	$+ \langle 2^2\rangle$	$+ \langle 2^21\rangle$	$+ 2\langle 3\rangle$	$+ 3\langle 31\rangle$	$+ \langle 31^2\rangle$
	$+ 3\langle 32\rangle$	$+ 2\langle 321\rangle$	$+ \langle 32^2\rangle$	$+ 2\langle 3^2\rangle$	$+ \langle 3^21\rangle$
	$+ \langle 3^22\rangle$	$+ 2\langle 4\rangle$	$+ 4\langle 41\rangle$	$+ 2\langle 41^2\rangle$	$+ 4\langle 42\rangle$
	$+ 3\langle 421\rangle$	$+ \langle 42^2\rangle$	$+ 4\langle 43\rangle$	$+ 3\langle 431\rangle$	$+ 2\langle 432\rangle$
	$+ \langle 43^2\rangle$	$+ 2\langle 4^2\rangle$	$+ 2\langle 4^21\rangle$	$+ \langle 4^22\rangle$	$+ 3\langle 5\rangle$
	$+ 5\langle 51\rangle$	$+ 2\langle 51^2\rangle$	$+ 6\langle 52\rangle$	$+ 4\langle 521\rangle$	$+ 2\langle 52^2\rangle$
	$+ 6\langle 53\rangle$	$+ 4\langle 531\rangle$	$+ 2\langle 532\rangle$	$+ 5\langle 54\rangle$	$+ 3\langle 541\rangle$
	$+ \langle 542\rangle$	$+ 2\langle 5^2\rangle$	$+ \langle 5^21\rangle$	$+ 3\langle 6\rangle$	$+ 6\langle 61\rangle$
	$+ 3\langle 61^2\rangle$	$+ 7\langle 62\rangle$	$+ 4\langle 621\rangle$	$+ \langle 62^2\rangle$	$+ 7\langle 63\rangle$
	$+ 4\langle 631\rangle$	$+ \langle 632\rangle$	$+ 5\langle 64\rangle$	$+ 2\langle 641\rangle$	$+ 3\langle 65\rangle$
	$+ \langle 651\rangle$	$+ \langle 6^2\rangle$	$+ 4\langle 7\rangle$	$+ 6\langle 71\rangle$	$+ 2\langle 71^2\rangle$
	$+ 7\langle 72\rangle$	$+ 3\langle 721\rangle$	$+ \langle 72^2\rangle$	$+ 6\langle 73\rangle$	$+ 2\langle 731\rangle$
	$+ 4\langle 74\rangle$	$+ \langle 741\rangle$	$+ 2\langle 75\rangle$	$+ \langle 76\rangle$	$+ 3\langle 8\rangle$
	$+ 5\langle 81\rangle$	$+ 2\langle 81^2\rangle$	$+ 5\langle 82\rangle$	$+ 2\langle 821\rangle$	$+ 4\langle 83\rangle$
	$+ \langle 831\rangle$	$+ 2\langle 84\rangle$	$+ \langle 85\rangle$	$+ 3\langle 9\rangle$	$+ 4\langle 91\rangle$
	$+ \langle 91^2\rangle$	$+ 4\langle 92\rangle$	$+ \langle 921\rangle$	$+ 2\langle 93\rangle$	$+ \langle 94\rangle$
	$+ 2\langle 10\ \rangle$	$+ 3\langle 10\ 1\rangle$	$+ \langle 10\ 1^2\rangle$	$+ 2\langle 10\ 2\rangle$	$+ \langle 10\ 3\rangle$
	$+ 2\langle 11\ \rangle$	$+ 2\langle 11\ 1\rangle$	$+ \langle 11\ 2\rangle$	$+ \langle 12\ \rangle$	$+ \langle 12\ 1\rangle$
	$+ \langle 13\ \rangle$				

$\langle 7\rangle \circ \langle 7\rangle$	$\langle 0\rangle$	$+\ \langle 1\rangle$	$+\ \langle 1^2\rangle$	$+\ \langle 1^3\rangle$	$+\ 2\langle 2\rangle$
	$+\ 2\langle 21\rangle$	$+\ \langle 21^2\rangle$	$+\ 2\langle 2^2\rangle$	$+\ \langle 2^21\rangle$	$+\ \langle 2^3\rangle$
	$+\ 2\langle 3\rangle$	$+\ 3\langle 31\rangle$	$+\ 2\langle 31^2\rangle$	$+\ 3\langle 32\rangle$	$+\ 2\langle 321\rangle$
	$+\ \langle 32^2\rangle$	$+\ 2\langle 3^2\rangle$	$+\ 2\langle 3^21\rangle$	$+\ \langle 3^22\rangle$	$+\ \langle 3^3\rangle$
	$+\ 3\langle 4\rangle$	$+\ 4\langle 41\rangle$	$+\ 2\langle 41^2\rangle$	$+\ 5\langle 42\rangle$	$+\ 3\langle 421\rangle$
	$+\ 2\langle 42^2\rangle$	$+\ 4\langle 43\rangle$	$+\ 3\langle 431\rangle$	$+\ 2\langle 432\rangle$	$+\ \langle 43^2\rangle$
	$+\ 3\langle 4^2\rangle$	$+\ 2\langle 4^21\rangle$	$+\ 2\langle 4^22\rangle$	$+\ \langle 4^23\rangle$	$+\ 3\langle 5\rangle$
	$+\ 5\langle 51\rangle$	$+\ 3\langle 51^2\rangle$	$+\ 6\langle 52\rangle$	$+\ 4\langle 521\rangle$	$+\ 2\langle 52^2\rangle$
	$+\ 6\langle 53\rangle$	$+\ 5\langle 531\rangle$	$+\ 3\langle 532\rangle$	$+\ \langle 53^2\rangle$	$+\ 5\langle 54\rangle$
	$+\ 4\langle 541\rangle$	$+\ 2\langle 542\rangle$	$+\ 3\langle 5^2\rangle$	$+\ 2\langle 5^21\rangle$	$+\ \langle 5^22\rangle$
	$+\ 4\langle 6\rangle$	$+\ 6\langle 61\rangle$	$+\ 3\langle 61^2\rangle$	$+\ 8\langle 62\rangle$	$+\ 5\langle 621\rangle$
	$+\ 2\langle 62^2\rangle$	$+\ 8\langle 63\rangle$	$+\ 5\langle 631\rangle$	$+\ 2\langle 632\rangle$	$+\ 7\langle 64\rangle$
	$+\ 4\langle 641\rangle$	$+\ \langle 642\rangle$	$+\ 4\langle 65\rangle$	$+\ 2\langle 651\rangle$	$+\ 2\langle 6^2\rangle$
	$+\ \langle 6^21\rangle$	$+\ 4\langle 7\rangle$	$+\ 7\langle 71\rangle$	$+\ 3\langle 71^2\rangle$	$+\ 8\langle 72\rangle$
	$+\ 4\langle 721\rangle$	$+\ \langle 72^2\rangle$	$+\ 8\langle 73\rangle$	$+\ 4\langle 731\rangle$	$+\ \langle 732\rangle$
	$+\ 6\langle 74\rangle$	$+\ 2\langle 741\rangle$	$+\ 4\langle 75\rangle$	$+\ \langle 751\rangle$	$+\ 2\langle 76\rangle$
	$+\ \langle 7^2\rangle$	$+\ 4\langle 8\rangle$	$+\ 6\langle 81\rangle$	$+\ 2\langle 81^2\rangle$	$+\ 7\langle 82\rangle$
	$+\ 3\langle 821\rangle$	$+\ \langle 82^2\rangle$	$+\ 6\langle 83\rangle$	$+\ 2\langle 831\rangle$	$+\ 4\langle 84\rangle$
	$+\ \langle 841\rangle$	$+\ 2\langle 85\rangle$	$+\ \langle 86\rangle$	$+\ 3\langle 9\rangle$	$+\ 5\langle 91\rangle$
	$+\ 2\langle 91^2\rangle$	$+\ 5\langle 92\rangle$	$+\ 2\langle 921\rangle$	$+\ 4\langle 93\rangle$	$+\ \langle 931\rangle$
	$+\ 2\langle 94\rangle$	$+\ \langle 95\rangle$	$+\ 3\langle 10\ \rangle$	$+\ 4\langle 10\ 1\rangle$	$+\ \langle 10\ 1^2\rangle$
	$+\ 4\langle 10\ 2\rangle$	$+\ \langle 10\ 21\rangle$	$+\ 2\langle 10\ 3\rangle$	$+\ \langle 10\ 4\rangle$	$+\ 2\langle 11\ \rangle$
	$+\ 3\langle 11\ 1\rangle$	$+\ \langle 11\ 1^2\rangle$	$+\ 2\langle 11\ 2\rangle$	$+\ \langle 11\ 3\rangle$	$+\ 2\langle 12\ \rangle$
	$+\ 2\langle 12\ 1\rangle$	$+\ \langle 12\ 2\rangle$	$+\ \langle 13\ \rangle$	$+\ \langle 13\ 1\rangle$	$+\ \langle 14\ \rangle$
$\langle 8\rangle \circ \langle 1\rangle$	$\langle 7\rangle$	$+\ \langle 71\rangle$	$+\ \langle 8\rangle$	$+\ \langle 81\rangle$	$+\ \langle 9\rangle$
$\langle 8\rangle \circ \langle 2\rangle$	$\langle 6\rangle$	$+\ \langle 61\rangle$	$+\ \langle 62\rangle$	$+\ \langle 7\rangle$	$+\ 2\langle 71\rangle$
	$+\ \langle 71^2\rangle$	$+\ \langle 72\rangle$	$+\ 2\langle 8\rangle$	$+\ 2\langle 81\rangle$	$+\ \langle 82\rangle$
	$+\ \langle 9\rangle$	$+\ \langle 91\rangle$	$+\ \langle 10\ \rangle$		
$\langle 8\rangle \circ \langle 3\rangle$	$\langle 5\rangle$	$+\ \langle 51\rangle$	$+\ \langle 52\rangle$	$+\ \langle 53\rangle$	$+\ \langle 6\rangle$
	$+\ 2\langle 61\rangle$	$+\ \langle 61^2\rangle$	$+\ 2\langle 62\rangle$	$+\ \langle 621\rangle$	$+\ \langle 63\rangle$
	$+\ 2\langle 7\rangle$	$+\ 3\langle 71\rangle$	$+\ \langle 71^2\rangle$	$+\ 3\langle 72\rangle$	$+\ \langle 721\rangle$
	$+\ \langle 73\rangle$	$+\ 2\langle 8\rangle$	$+\ 3\langle 81\rangle$	$+\ \langle 81^2\rangle$	$+\ 2\langle 82\rangle$
	$+\ \langle 83\rangle$	$+\ 2\langle 9\rangle$	$+\ 2\langle 91\rangle$	$+\ \langle 92\rangle$	$+\ \langle 10\ \rangle$
	$+\ \langle 10\ 1\rangle$	$+\ \langle 11\ \rangle$			
$\langle 8\rangle \circ \langle 4\rangle$	$\langle 4\rangle$	$+\ \langle 41\rangle$	$+\ \langle 42\rangle$	$+\ \langle 43\rangle$	$+\ \langle 4^2\rangle$
	$+\ \langle 5\rangle$	$+\ 2\langle 51\rangle$	$+\ \langle 51^2\rangle$	$+\ 2\langle 52\rangle$	$+\ \langle 521\rangle$
	$+\ 2\langle 53\rangle$	$+\ \langle 531\rangle$	$+\ \langle 54\rangle$	$+\ 2\langle 6\rangle$	$+\ 3\langle 61\rangle$
	$+\ \langle 61^2\rangle$	$+\ 4\langle 62\rangle$	$+\ 2\langle 621\rangle$	$+\ \langle 62^2\rangle$	$+\ 3\langle 63\rangle$
	$+\ \langle 631\rangle$	$+\ \langle 64\rangle$	$+\ 2\langle 7\rangle$	$+\ 4\langle 71\rangle$	$+\ 2\langle 71^2\rangle$
	$+\ 4\langle 72\rangle$	$+\ 2\langle 721\rangle$	$+\ 3\langle 73\rangle$	$+\ \langle 731\rangle$	$+\ \langle 74\rangle$
	$+\ 3\langle 8\rangle$	$+\ 4\langle 81\rangle$	$+\ \langle 81^2\rangle$	$+\ 4\langle 82\rangle$	$+\ \langle 821\rangle$
	$+\ 2\langle 83\rangle$	$+\ \langle 84\rangle$	$+\ 2\langle 9\rangle$	$+\ 3\langle 91\rangle$	$+\ \langle 91^2\rangle$
	$+\ 2\langle 92\rangle$	$+\ \langle 93\rangle$	$+\ 2\langle 10\ \rangle$	$+\ 2\langle 10\ 1\rangle$	$+\ \langle 10\ 2\rangle$
	$+\ \langle 11\ \rangle$	$+\ \langle 11\ 1\rangle$	$+\ \langle 12\ \rangle$		

$\langle 8\rangle \circ \langle 5\rangle$	$\langle 3\rangle$	$+\ \langle 31\rangle$	$+\ \langle 32\rangle$	$+\ \langle 3^2\rangle$	$+\ \langle 4\rangle$
	$+\ 2\langle 41\rangle$	$+\ \langle 41^2\rangle$	$+\ 2\langle 42\rangle$	$+\ \langle 421\rangle$	$+\ 2\langle 43\rangle$
	$+\ \langle 431\rangle$	$+\ \langle 4^2\rangle$	$+\ \langle 4^21\rangle$	$+\ 2\langle 5\rangle$	$+\ 3\langle 51\rangle$
	$+\ \langle 51^2\rangle$	$+\ 4\langle 52\rangle$	$+\ 2\langle 521\rangle$	$+\ \langle 52^2\rangle$	$+\ 4\langle 53\rangle$
	$+\ 2\langle 531\rangle$	$+\ \langle 532\rangle$	$+\ 3\langle 54\rangle$	$+\ \langle 541\rangle$	$+\ \langle 5^2\rangle$
	$+\ 2\langle 6\rangle$	$+\ 4\langle 61\rangle$	$+\ 2\langle 61^2\rangle$	$+\ 5\langle 62\rangle$	$+\ 3\langle 621\rangle$
	$+\ \langle 62^2\rangle$	$+\ 5\langle 63\rangle$	$+\ 3\langle 631\rangle$	$+\ \langle 632\rangle$	$+\ 3\langle 64\rangle$
	$+\ \langle 641\rangle$	$+\ \langle 65\rangle$	$+\ 3\langle 7\rangle$	$+\ 5\langle 71\rangle$	$+\ 2\langle 71^2\rangle$
	$+\ 6\langle 72\rangle$	$+\ 3\langle 721\rangle$	$+\ \langle 72^2\rangle$	$+\ 5\langle 73\rangle$	$+\ 2\langle 731\rangle$
	$+\ 3\langle 74\rangle$	$+\ \langle 741\rangle$	$+\ \langle 75\rangle$	$+\ 3\langle 8\rangle$	$+\ 5\langle 81\rangle$
	$+\ 2\langle 81^2\rangle$	$+\ 5\langle 82\rangle$	$+\ 2\langle 821\rangle$	$+\ 4\langle 83\rangle$	$+\ \langle 831\rangle$
	$+\ 2\langle 84\rangle$	$+\ \langle 85\rangle$	$+\ 3\langle 9\rangle$	$+\ 4\langle 91\rangle$	$+\ \langle 91^2\rangle$
	$+\ 4\langle 92\rangle$	$+\ \langle 921\rangle$	$+\ 2\langle 93\rangle$	$+\ \langle 94\rangle$	$+\ 2\langle 10\ \rangle$
	$+\ 3\langle 10\ 1\rangle$	$+\ \langle 10\ 1^2\rangle$	$+\ 2\langle 10\ 2\rangle$	$+\ \langle 10\ 3\rangle$	$+\ 2\langle 11\ \rangle$
	$+\ 2\langle 11\ 1\rangle$	$+\ \langle 11\ 2\rangle$	$+\ \langle 12\ \rangle$	$+\ \langle 12\ 1\rangle$	$+\ \langle 13\ \rangle$
$\langle 8\rangle \circ \langle 6\rangle$	$\langle 2\rangle$	$+\ \langle 21\rangle$	$+\ \langle 2^2\rangle$	$+\ \langle 3\rangle$	$+\ 2\langle 31\rangle$
	$+\ \langle 31^2\rangle$	$+\ 2\langle 32\rangle$	$+\ \langle 321\rangle$	$+\ \langle 3^2\rangle$	$+\ \langle 3^21\rangle$
	$+\ 2\langle 4\rangle$	$+\ 3\langle 41\rangle$	$+\ \langle 41^2\rangle$	$+\ 4\langle 42\rangle$	$+\ 2\langle 421\rangle$
	$+\ \langle 42^2\rangle$	$+\ 3\langle 43\rangle$	$+\ 2\langle 431\rangle$	$+\ \langle 432\rangle$	$+\ 2\langle 4^2\rangle$
	$+\ \langle 4^21\rangle$	$+\ \langle 4^22\rangle$	$+\ 2\langle 5\rangle$	$+\ 4\langle 51\rangle$	$+\ 2\langle 51^2\rangle$
	$+\ 5\langle 52\rangle$	$+\ 3\langle 521\rangle$	$+\ \langle 52^2\rangle$	$+\ 5\langle 53\rangle$	$+\ 4\langle 531\rangle$
	$+\ 2\langle 532\rangle$	$+\ \langle 53^2\rangle$	$+\ 4\langle 54\rangle$	$+\ 3\langle 541\rangle$	$+\ \langle 542\rangle$
	$+\ 2\langle 5^2\rangle$	$+\ \langle 5^21\rangle$	$+\ 3\langle 6\rangle$	$+\ 5\langle 61\rangle$	$+\ 2\langle 61^2\rangle$
	$+\ 7\langle 62\rangle$	$+\ 4\langle 621\rangle$	$+\ 2\langle 62^2\rangle$	$+\ 7\langle 63\rangle$	$+\ 4\langle 631\rangle$
	$+\ 2\langle 632\rangle$	$+\ 6\langle 64\rangle$	$+\ 3\langle 641\rangle$	$+\ \langle 642\rangle$	$+\ 3\langle 65\rangle$
	$+\ \langle 651\rangle$	$+\ \langle 6^2\rangle$	$+\ 3\langle 7\rangle$	$+\ 6\langle 71\rangle$	$+\ 3\langle 71^2\rangle$
	$+\ 7\langle 72\rangle$	$+\ 4\langle 721\rangle$	$+\ \langle 72^2\rangle$	$+\ 7\langle 73\rangle$	$+\ 4\langle 731\rangle$
	$+\ \langle 732\rangle$	$+\ 5\langle 74\rangle$	$+\ 2\langle 741\rangle$	$+\ 3\langle 75\rangle$	$+\ \langle 751\rangle$
	$+\ \langle 76\rangle$	$+\ 4\langle 8\rangle$	$+\ 6\langle 81\rangle$	$+\ 2\langle 81^2\rangle$	$+\ 7\langle 82\rangle$
	$+\ 3\langle 821\rangle$	$+\ \langle 82^2\rangle$	$+\ 6\langle 83\rangle$	$+\ 2\langle 831\rangle$	$+\ 4\langle 84\rangle$
	$+\ \langle 841\rangle$	$+\ 2\langle 85\rangle$	$+\ \langle 86\rangle$	$+\ 3\langle 9\rangle$	$+\ 5\langle 91\rangle$
	$+\ 2\langle 91^2\rangle$	$+\ 5\langle 92\rangle$	$+\ 2\langle 921\rangle$	$+\ 4\langle 93\rangle$	$+\ \langle 931\rangle$
	$+\ 2\langle 94\rangle$	$+\ \langle 95\rangle$	$+\ 3\langle 10\ \rangle$	$+\ 4\langle 10\ 1\rangle$	$+\ \langle 10\ 1^2\rangle$
	$+\ 4\langle 10\ 2\rangle$	$+\ \langle 10\ 21\rangle$	$+\ 2\langle 10\ 3\rangle$	$+\ \langle 10\ 4\rangle$	$+\ 2\langle 11\ \rangle$
	$+\ 3\langle 11\ 1\rangle$	$+\ \langle 11\ 1^2\rangle$	$+\ 2\langle 11\ 2\rangle$	$+\ \langle 11\ 3\rangle$	$+\ 2\langle 12\ \rangle$
	$+\ 2\langle 12\ 1\rangle$	$+\ \langle 12\ 2\rangle$	$+\ \langle 13\ \rangle$	$+\ \langle 13\ 1\rangle$	$+\ \langle 14\ \rangle$

$\langle 8\rangle \circ \langle 7\rangle$	$\langle 1\rangle$	$+\ \langle 1^2\rangle$	$+\ \langle 2\rangle$	$+\ 2\langle 21\rangle$	$+\ \langle 21^2\rangle$
	$+\ \langle 2^2\rangle$	$+\ \langle 2^21\rangle$	$+\ 2\langle 3\rangle$	$+\ 3\langle 31\rangle$	$+\ \langle 31^2\rangle$
	$+\ 3\langle 32\rangle$	$+\ 2\langle 321\rangle$	$+\ \langle 32^2\rangle$	$+\ 2\langle 3^2\rangle$	$+\ \langle 3^21\rangle$
	$+\ \langle 3^22\rangle$	$+\ 2\langle 4\rangle$	$+\ 4\langle 41\rangle$	$+\ 2\langle 41^2\rangle$	$+\ 4\langle 42\rangle$
	$+\ 3\langle 421\rangle$	$+\ \langle 42^2\rangle$	$+\ 4\langle 43\rangle$	$+\ 3\langle 431\rangle$	$+\ 2\langle 432\rangle$
	$+\ \langle 43^2\rangle$	$+\ 2\langle 4^2\rangle$	$+\ 2\langle 4^21\rangle$	$+\ \langle 4^22\rangle$	$+\ \langle 4^23\rangle$
	$+\ 3\langle 5\rangle$	$+\ 5\langle 51\rangle$	$+\ 2\langle 51^2\rangle$	$+\ 6\langle 52\rangle$	$+\ 4\langle 521\rangle$
	$+\ 2\langle 52^2\rangle$	$+\ 6\langle 53\rangle$	$+\ 4\langle 531\rangle$	$+\ 3\langle 532\rangle$	$+\ \langle 53^2\rangle$
	$+\ 5\langle 54\rangle$	$+\ 4\langle 541\rangle$	$+\ 3\langle 542\rangle$	$+\ \langle 543\rangle$	$+\ 3\langle 5^2\rangle$
	$+\ 2\langle 5^21\rangle$	$+\ \langle 5^22\rangle$	$+\ 3\langle 6\rangle$	$+\ 6\langle 61\rangle$	$+\ 3\langle 61^2\rangle$
	$+\ 7\langle 62\rangle$	$+\ 5\langle 621\rangle$	$+\ 2\langle 62^2\rangle$	$+\ 8\langle 63\rangle$	$+\ 6\langle 631\rangle$
	$+\ 3\langle 632\rangle$	$+\ \langle 63^2\rangle$	$+\ 7\langle 64\rangle$	$+\ 5\langle 641\rangle$	$+\ 2\langle 642\rangle$
	$+\ 5\langle 65\rangle$	$+\ 3\langle 651\rangle$	$+\ \langle 652\rangle$	$+\ 2\langle 6^2\rangle$	$+\ \langle 6^21\rangle$
	$+\ 4\langle 7\rangle$	$+\ 7\langle 71\rangle$	$+\ 3\langle 71^2\rangle$	$+\ 9\langle 72\rangle$	$+\ 5\langle 721\rangle$
	$+\ 2\langle 72^2\rangle$	$+\ 9\langle 73\rangle$	$+\ 5\langle 731\rangle$	$+\ 2\langle 732\rangle$	$+\ 8\langle 74\rangle$
	$+\ 4\langle 741\rangle$	$+\ \langle 742\rangle$	$+\ 5\langle 75\rangle$	$+\ 2\langle 751\rangle$	$+\ 3\langle 76\rangle$
	$+\ \langle 761\rangle$	$+\ \langle 7^2\rangle$	$+\ 4\langle 8\rangle$	$+\ 7\langle 81\rangle$	$+\ 3\langle 81^2\rangle$
	$+\ 8\langle 82\rangle$	$+\ 4\langle 821\rangle$	$+\ \langle 82^2\rangle$	$+\ 8\langle 83\rangle$	$+\ 4\langle 831\rangle$
	$+\ \langle 832\rangle$	$+\ 6\langle 84\rangle$	$+\ 2\langle 841\rangle$	$+\ 4\langle 85\rangle$	$+\ \langle 851\rangle$
	$+\ 2\langle 86\rangle$	$+\ \langle 87\rangle$	$+\ 4\langle 9\rangle$	$+\ 6\langle 91\rangle$	$+\ 2\langle 91^2\rangle$
	$+\ 7\langle 92\rangle$	$+\ 3\langle 921\rangle$	$+\ \langle 92^2\rangle$	$+\ 6\langle 93\rangle$	$+\ 2\langle 931\rangle$
	$+\ 4\langle 94\rangle$	$+\ \langle 941\rangle$	$+\ 2\langle 95\rangle$	$+\ \langle 96\rangle$	$+\ 3\langle 10\ \rangle$
	$+\ 5\langle 10\ 1\rangle$	$+\ 2\langle 10\ 1^2\rangle$	$+\ 5\langle 10\ 2\rangle$	$+\ 2\langle 10\ 21\rangle$	$+\ 4\langle 10\ 3\rangle$
	$+\ \langle 10\ 31\rangle$	$+\ 2\langle 10\ 4\rangle$	$+\ \langle 10\ 5\rangle$	$+\ 3\langle 11\ \rangle$	$+\ 4\langle 11\ 1\rangle$
	$+\ \langle 11\ 1^2\rangle$	$+\ 4\langle 11\ 2\rangle$	$+\ \langle 11\ 21\rangle$	$+\ 2\langle 11\ 3\rangle$	$+\ \langle 11\ 4\rangle$
	$+\ 2\langle 12\ \rangle$	$+\ 3\langle 12\ 1\rangle$	$+\ \langle 12\ 1^2\rangle$	$+\ 2\langle 12\ 2\rangle$	$+\ \langle 12\ 3\rangle$
	$+\ 2\langle 13\ \rangle$	$+\ 2\langle 13\ 1\rangle$	$+\ \langle 13\ 2\rangle$	$+\ \langle 14\ \rangle$	$+\ \langle 14\ 1\rangle$
	$+\ \langle 15\ \rangle$				

$\langle 8\rangle \circ \langle 8\rangle$	$\langle 0\rangle$	$+\ \langle 1\rangle$	$+\ \langle 1^2\rangle$	$+\ \langle 1^3\rangle$	$+\ 2\langle 2\rangle$
	$+\ 2\langle 21\rangle$	$+\ \langle 21^2\rangle$	$+\ 2\langle 2^2\rangle$	$+\ \langle 2^21\rangle$	$+\ \langle 2^3\rangle$
	$+\ 2\langle 3\rangle$	$+\ 3\langle 31\rangle$	$+\ 2\langle 31^2\rangle$	$+\ 3\langle 32\rangle$	$+\ 2\langle 321\rangle$
	$+\ \langle 32^2\rangle$	$+\ 2\langle 3^2\rangle$	$+\ 2\langle 3^21\rangle$	$+\ \langle 3^22\rangle$	$+\ \langle 3^3\rangle$
	$+\ 3\langle 4\rangle$	$+\ 4\langle 41\rangle$	$+\ 2\langle 41^2\rangle$	$+\ 5\langle 42\rangle$	$+\ 3\langle 421\rangle$
	$+\ 2\langle 42^2\rangle$	$+\ 4\langle 43\rangle$	$+\ 3\langle 431\rangle$	$+\ 2\langle 432\rangle$	$+\ \langle 43^2\rangle$
	$+\ 3\langle 4^2\rangle$	$+\ 2\langle 4^21\rangle$	$+\ 2\langle 4^22\rangle$	$+\ \langle 4^23\rangle$	$+\ \langle 4^3\rangle$
	$+\ 3\langle 5\rangle$	$+\ 5\langle 51\rangle$	$+\ 3\langle 51^2\rangle$	$+\ 6\langle 52\rangle$	$+\ 4\langle 521\rangle$
	$+\ 2\langle 52^2\rangle$	$+\ 6\langle 53\rangle$	$+\ 5\langle 531\rangle$	$+\ 3\langle 532\rangle$	$+\ 2\langle 53^2\rangle$
	$+\ 5\langle 54\rangle$	$+\ 4\langle 541\rangle$	$+\ 3\langle 542\rangle$	$+\ 2\langle 543\rangle$	$+\ 3\langle 5^2\rangle$
	$+\ 3\langle 5^21\rangle$	$+\ 2\langle 5^22\rangle$	$+\ \langle 5^23\rangle$	$+\ 4\langle 6\rangle$	$+\ 6\langle 61\rangle$
	$+\ 3\langle 61^2\rangle$	$+\ 8\langle 62\rangle$	$+\ 5\langle 621\rangle$	$+\ 3\langle 62^2\rangle$	$+\ 8\langle 63\rangle$
	$+\ 6\langle 631\rangle$	$+\ 4\langle 632\rangle$	$+\ \langle 63^2\rangle$	$+\ 8\langle 64\rangle$	$+\ 6\langle 641\rangle$
	$+\ 4\langle 642\rangle$	$+\ \langle 643\rangle$	$+\ 6\langle 65\rangle$	$+\ 4\langle 651\rangle$	$+\ 2\langle 652\rangle$
	$+\ 3\langle 6^2\rangle$	$+\ 2\langle 6^21\rangle$	$+\ \langle 6^22\rangle$	$+\ 4\langle 7\rangle$	$+\ 7\langle 71\rangle$
	$+\ 4\langle 71^2\rangle$	$+\ 9\langle 72\rangle$	$+\ 6\langle 721\rangle$	$+\ 2\langle 72^2\rangle$	$+\ 10\langle 73\rangle$
	$+\ 7\langle 731\rangle$	$+\ 3\langle 732\rangle$	$+\ \langle 73^2\rangle$	$+\ 9\langle 74\rangle$	$+\ 6\langle 741\rangle$
	$+\ 2\langle 742\rangle$	$+\ 7\langle 75\rangle$	$+\ 4\langle 751\rangle$	$+\ \langle 752\rangle$	$+\ 4\langle 76\rangle$
	$+\ 2\langle 761\rangle$	$+\ 2\langle 7^2\rangle$	$+\ \langle 7^21\rangle$	$+\ 5\langle 8\rangle$	$+\ 8\langle 81\rangle$
	$+\ 3\langle 81^2\rangle$	$+\ 10\langle 82\rangle$	$+\ 5\langle 821\rangle$	$+\ 2\langle 82^2\rangle$	$+\ 10\langle 83\rangle$
	$+\ 5\langle 831\rangle$	$+\ 2\langle 832\rangle$	$+\ 9\langle 84\rangle$	$+\ 4\langle 841\rangle$	$+\ \langle 842\rangle$
	$+\ 6\langle 85\rangle$	$+\ 2\langle 851\rangle$	$+\ 4\langle 86\rangle$	$+\ \langle 861\rangle$	$+\ 2\langle 87\rangle$
	$+\ \langle 8^2\rangle$	$+\ 4\langle 9\rangle$	$+\ 7\langle 91\rangle$	$+\ 3\langle 91^2\rangle$	$+\ 8\langle 92\rangle$
	$+\ 4\langle 921\rangle$	$+\ \langle 92^2\rangle$	$+\ 8\langle 93\rangle$	$+\ 4\langle 931\rangle$	$+\ \langle 932\rangle$
	$+\ 6\langle 94\rangle$	$+\ 2\langle 941\rangle$	$+\ 4\langle 95\rangle$	$+\ \langle 951\rangle$	$+\ 2\langle 96\rangle$
	$+\ \langle 97\rangle$	$+\ 4\langle 10\ \rangle$	$+\ 6\langle 10\ 1\rangle$	$+\ 2\langle 10\ 1^2\rangle$	$+\ 7\langle 10\ 2\rangle$
	$+\ 3\langle 10\ 21\rangle$	$+\ \langle 10\ 2^2\rangle$	$+\ 6\langle 10\ 3\rangle$	$+\ 2\langle 10\ 31\rangle$	$+\ 4\langle 10\ 4\rangle$
	$+\ \langle 10\ 41\rangle$	$+\ 2\langle 10\ 5\rangle$	$+\ \langle 10\ 6\rangle$	$+\ 3\langle 11\ \rangle$	$+\ 5\langle 11\ 1\rangle$
	$+\ 2\langle 11\ 1^2\rangle$	$+\ 5\langle 11\ 2\rangle$	$+\ 2\langle 11\ 21\rangle$	$+\ 4\langle 11\ 3\rangle$	$+\ \langle 11\ 31\rangle$
	$+\ 2\langle 11\ 4\rangle$	$+\ \langle 11\ 5\rangle$	$+\ 3\langle 12\ \rangle$	$+\ 4\langle 12\ 1\rangle$	$+\ \langle 12\ 1^2\rangle$
	$+\ 4\langle 12\ 2\rangle$	$+\ \langle 12\ 21\rangle$	$+\ 2\langle 12\ 3\rangle$	$+\ \langle 12\ 4\rangle$	$+\ 2\langle 13\ \rangle$
	$+\ 3\langle 13\ 1\rangle$	$+\ \langle 13\ 1^2\rangle$	$+\ 2\langle 13\ 2\rangle$	$+\ \langle 13\ 3\rangle$	$+\ 2\langle 14\ \rangle$
	$+\ 2\langle 14\ 1\rangle$	$+\ \langle 14\ 2\rangle$	$+\ \langle 15\ \rangle$	$+\ \langle 15\ 1\rangle$	$+\ \langle 16\ \rangle$

Table II. Reduced inner products $\langle k\rangle \circ \langle 1^\ell\rangle$

$\langle 1\rangle \circ \langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$+\ \langle 1\rangle$	$+\ \langle 1^2\rangle$	$+\ \langle 2\rangle$	
$\langle 2\rangle \circ \langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$+\ \langle 1^2\rangle$	$+\ \langle 2\rangle$	$+\ \langle 21\rangle$	$+\ \langle 3\rangle$
$\langle 1\rangle \circ \langle 1^2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$+\ \langle 1^2\rangle$	$+\ \langle 1^3\rangle$	$+\ \langle 2\rangle$	$+\ \langle 21\rangle$
$\langle 2\rangle \circ \langle 1^2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$+\ 2\langle 1^2\rangle$	$+\ \langle 1^3\rangle$	$+\ \langle 2\rangle$	$+\ 2\langle 21\rangle$
	$+\ \langle 21^2\rangle$	$+\ \langle 3\rangle$	$+\ \langle 31\rangle$		
$\langle 3\rangle \circ \langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$+\ \langle 21\rangle$	$+\ \langle 3\rangle$	$+\ \langle 31\rangle$	$+\ \langle 4\rangle$
$\langle 1\rangle \circ \langle 1^3\rangle$	$\langle 1^2\rangle$	$+\ \langle 1^3\rangle$	$+\ \langle 1^4\rangle$	$+\ \langle 21\rangle$	$+\ \langle 21^2\rangle$
$\langle 3\rangle \circ \langle 1^2\rangle$	$\langle 1^2\rangle$	$+\ \langle 1^3\rangle$	$+\ \langle 2\rangle$	$+\ 2\langle 21\rangle$	$+\ \langle 21^2\rangle$
	$+\ \langle 2^2\rangle$	$+\ \langle 3\rangle$	$+\ 2\langle 31\rangle$	$+\ \langle 31^2\rangle$	$+\ \langle 4\rangle$
	$+\ \langle 41\rangle$				
$\langle 2\rangle \circ \langle 1^3\rangle$	$\langle 1^2\rangle$	$+\ 2\langle 1^3\rangle$	$+\ \langle 1^4\rangle$	$+\ \langle 2\rangle$	$+\ 2\langle 21\rangle$
	$+\ 2\langle 21^2\rangle$	$+\ \langle 21^3\rangle$	$+\ \langle 2^2\rangle$	$+\ \langle 31\rangle$	$+\ \langle 31^2\rangle$
$\langle 3\rangle \circ \langle 1^3\rangle$	$\langle 1^2\rangle$	$+\ 2\langle 1^3\rangle$	$+\ \langle 1^4\rangle$	$+\ 2\langle 21\rangle$	$+\ 3\langle 21^2\rangle$
	$+\ \langle 21^3\rangle$	$+\ \langle 2^2\rangle$	$+\ \langle 2^21\rangle$	$+\ \langle 3\rangle$	$+\ 2\langle 31\rangle$
	$+\ 2\langle 31^2\rangle$	$+\ \langle 31^3\rangle$	$+\ \langle 32\rangle$	$+\ \langle 41\rangle$	$+\ \langle 41^2\rangle$
$\langle 4\rangle \circ \langle 1\rangle$	$\langle 3\rangle$	$+\ \langle 31\rangle$	$+\ \langle 4\rangle$	$+\ \langle 41\rangle$	$+\ \langle 5\rangle$
$\langle 1\rangle \circ \langle 1^4\rangle$	$\langle 1^3\rangle$	$+\ \langle 1^4\rangle$	$+\ \langle 1^5\rangle$	$+\ \langle 21^2\rangle$	$+\ \langle 21^3\rangle$
$\langle 4\rangle \circ \langle 1^2\rangle$	$\langle 21\rangle$	$+\ \langle 21^2\rangle$	$+\ \langle 3\rangle$	$+\ 2\langle 31\rangle$	$+\ \langle 31^2\rangle$
	$+\ \langle 32\rangle$	$+\ \langle 4\rangle$	$+\ 2\langle 41\rangle$	$+\ \langle 41^2\rangle$	$+\ \langle 5\rangle$
	$+\ \langle 51\rangle$				
$\langle 2\rangle \circ \langle 1^4\rangle$	$\langle 1^3\rangle$	$+\ 2\langle 1^4\rangle$	$+\ \langle 1^5\rangle$	$+\ \langle 21\rangle$	$+\ 2\langle 21^2\rangle$
	$+\ 2\langle 21^3\rangle$	$+\ \langle 21^4\rangle$	$+\ \langle 2^2\rangle$	$+\ \langle 2^21\rangle$	$+\ \langle 31^2\rangle$
	$+\ \langle 31^3\rangle$				
$\langle 4\rangle \circ \langle 1^3\rangle$	$\langle 1^3\rangle$	$+\ \langle 1^4\rangle$	$+\ \langle 21\rangle$	$+\ 2\langle 21^2\rangle$	$+\ \langle 21^3\rangle$
	$+\ \langle 2^2\rangle$	$+\ \langle 2^21\rangle$	$+\ 2\langle 31\rangle$	$+\ 3\langle 31^2\rangle$	$+\ \langle 31^3\rangle$
	$+\ \langle 32\rangle$	$+\ \langle 321\rangle$	$+\ \langle 4\rangle$	$+\ 2\langle 41\rangle$	$+\ 2\langle 41^2\rangle$
	$+\ \langle 41^3\rangle$	$+\ \langle 42\rangle$	$+\ \langle 51\rangle$	$+\ \langle 51^2\rangle$	
$\langle 3\rangle \circ \langle 1^4\rangle$	$\langle 1^3\rangle$	$+\ 2\langle 1^4\rangle$	$+\ \langle 1^5\rangle$	$+\ \langle 21\rangle$	$+\ 3\langle 21^2\rangle$
	$+\ 3\langle 21^3\rangle$	$+\ \langle 21^4\rangle$	$+\ \langle 2^2\rangle$	$+\ 2\langle 2^21\rangle$	$+\ \langle 2^21^2\rangle$
	$+\ \langle 31\rangle$	$+\ 2\langle 31^2\rangle$	$+\ 2\langle 31^3\rangle$	$+\ \langle 31^4\rangle$	$+\ \langle 32\rangle$
	$+\ \langle 321\rangle$	$+\ \langle 41^2\rangle$	$+\ \langle 41^3\rangle$		
$\langle 4\rangle \circ \langle 1^4\rangle$	$\langle 1^3\rangle$	$+\ 2\langle 1^4\rangle$	$+\ \langle 1^5\rangle$	$+\ 2\langle 21^2\rangle$	$+\ 3\langle 21^3\rangle$
	$+\ \langle 21^4\rangle$	$+\ \langle 2^2\rangle$	$+\ 2\langle 2^21\rangle$	$+\ \langle 2^21^2\rangle$	$+\ \langle 2^3\rangle$
	$+\ \langle 31\rangle$	$+\ 3\langle 31^2\rangle$	$+\ 3\langle 31^3\rangle$	$+\ \langle 31^4\rangle$	$+\ \langle 32\rangle$
	$+\ 2\langle 321\rangle$	$+\ \langle 321^2\rangle$	$+\ \langle 41\rangle$	$+\ 2\langle 41^2\rangle$	$+\ 2\langle 41^3\rangle$
	$+\ \langle 41^4\rangle$	$+\ \langle 42\rangle$	$+\ \langle 421\rangle$	$+\ \langle 51^2\rangle$	$+\ \langle 51^3\rangle$
$\langle 5\rangle \circ \langle 1\rangle$	$\langle 4\rangle$	$+\ \langle 41\rangle$	$+\ \langle 5\rangle$	$+\ \langle 51\rangle$	$+\ \langle 6\rangle$
$\langle 1\rangle \circ \langle 1^5\rangle$	$\langle 1^4\rangle$	$+\ \langle 1^5\rangle$	$+\ \langle 1^6\rangle$	$+\ \langle 21^3\rangle$	$+\ \langle 21^4\rangle$
$\langle 5\rangle \circ \langle 1^2\rangle$	$\langle 31\rangle$	$+\ \langle 31^2\rangle$	$+\ \langle 4\rangle$	$+\ 2\langle 41\rangle$	$+\ \langle 41^2\rangle$
	$+\ \langle 42\rangle$	$+\ \langle 5\rangle$	$+\ 2\langle 51\rangle$	$+\ \langle 51^2\rangle$	$+\ \langle 6\rangle$
	$+\ \langle 61\rangle$				
$\langle 2\rangle \circ \langle 1^5\rangle$	$\langle 1^4\rangle$	$+\ 2\langle 1^5\rangle$	$+\ \langle 1^6\rangle$	$+\ \langle 21^2\rangle$	$+\ 2\langle 21^3\rangle$
	$+\ 2\langle 21^4\rangle$	$+\ \langle 21^5\rangle$	$+\ \langle 2^21\rangle$	$+\ \langle 2^21^2\rangle$	$+\ \langle 31^3\rangle$
	$+\ \langle 31^4\rangle$				
$\langle 5\rangle \circ \langle 1^3\rangle$	$\langle 21^2\rangle$	$+\ \langle 21^3\rangle$	$+\ \langle 31\rangle$	$+\ 2\langle 31^2\rangle$	$+\ \langle 31^3\rangle$
	$+\ \langle 32\rangle$	$+\ \langle 321\rangle$	$+\ 2\langle 41\rangle$	$+\ 3\langle 41^2\rangle$	$+\ \langle 41^3\rangle$
	$+\ \langle 42\rangle$	$+\ \langle 421\rangle$	$+\ \langle 5\rangle$	$+\ 2\langle 51\rangle$	$+\ 2\langle 51^2\rangle$
	$+\ \langle 51^3\rangle$	$+\ \langle 52\rangle$	$+\ \langle 61\rangle$	$+\ \langle 61^2\rangle$	

$\langle 3\rangle \circ \langle 1^5\rangle$	$\langle 1^4\rangle$	$+ 2\langle 1^5\rangle$	$+ \langle 1^6\rangle$	$+ \langle 21^2\rangle$	$+ 3\langle 21^3\rangle$
	$+ 3\langle 21^4\rangle$	$+ \langle 21^5\rangle$	$+ \langle 2^2\rangle$	$+ 2\langle 2^21\rangle$	$+ 2\langle 2^21^2\rangle$
	$+ \langle 2^21^3\rangle$	$+ \langle 2^3\rangle$	$+ \langle 31^2\rangle$	$+ 2\langle 31^3\rangle$	$+ 2\langle 31^4\rangle$
	$+ \langle 31^5\rangle$	$+ \langle 321\rangle$	$+ \langle 321^2\rangle$	$+ \langle 41^3\rangle$	$+ \langle 41^4\rangle$
$\langle 5\rangle \circ \langle 1^4\rangle$	$\langle 1^4\rangle$	$+ \langle 1^5\rangle$	$+ \langle 21^2\rangle$	$+ 2\langle 21^3\rangle$	$+ \langle 21^4\rangle$
	$+ \langle 2^21\rangle$	$+ \langle 2^21^2\rangle$	$+ 2\langle 31^2\rangle$	$+ 3\langle 31^3\rangle$	$+ \langle 31^4\rangle$
	$+ \langle 32\rangle$	$+ 2\langle 321\rangle$	$+ \langle 321^2\rangle$	$+ \langle 32^2\rangle$	$+ \langle 41\rangle$
	$+ 3\langle 41^2\rangle$	$+ 3\langle 41^3\rangle$	$+ \langle 41^4\rangle$	$+ \langle 42\rangle$	$+ 2\langle 421\rangle$
	$+ \langle 421^2\rangle$	$+ \langle 51\rangle$	$+ 2\langle 51^2\rangle$	$+ 2\langle 51^3\rangle$	$+ \langle 51^4\rangle$
	$+ \langle 52\rangle$	$+ \langle 521\rangle$	$+ \langle 61^2\rangle$	$+ \langle 61^3\rangle$	
$\langle 4\rangle \circ \langle 1^5\rangle$	$\langle 1^4\rangle$	$+ 2\langle 1^5\rangle$	$+ \langle 1^6\rangle$	$+ \langle 21^2\rangle$	$+ 3\langle 21^3\rangle$
	$+ 3\langle 21^4\rangle$	$+ \langle 21^5\rangle$	$+ 2\langle 2^21\rangle$	$+ 3\langle 2^21^2\rangle$	$+ \langle 2^21^3\rangle$
	$+ \langle 2^3\rangle$	$+ \langle 2^31\rangle$	$+ \langle 31^2\rangle$	$+ 3\langle 31^3\rangle$	$+ 3\langle 31^4\rangle$
	$+ \langle 31^5\rangle$	$+ \langle 32\rangle$	$+ 2\langle 321\rangle$	$+ 2\langle 321^2\rangle$	$+ \langle 321^3\rangle$
	$+ \langle 32^2\rangle$	$+ \langle 41^2\rangle$	$+ 2\langle 41^3\rangle$	$+ 2\langle 41^4\rangle$	$+ \langle 41^5\rangle$
	$+ \langle 421\rangle$	$+ \langle 421^2\rangle$	$+ \langle 51^3\rangle$	$+ \langle 51^4\rangle$	
$\langle 5\rangle \circ \langle 1^5\rangle$	$\langle 1^4\rangle$	$+ 2\langle 1^5\rangle$	$+ \langle 1^6\rangle$	$+ 2\langle 21^3\rangle$	$+ 3\langle 21^4\rangle$
	$+ \langle 21^5\rangle$	$+ \langle 2^21\rangle$	$+ 2\langle 2^21^2\rangle$	$+ \langle 2^21^3\rangle$	$+ \langle 2^3\rangle$
	$+ \langle 2^31\rangle$	$+ \langle 31^2\rangle$	$+ 3\langle 31^3\rangle$	$+ 3\langle 31^4\rangle$	$+ \langle 31^5\rangle$
	$+ 2\langle 321\rangle$	$+ 3\langle 321^2\rangle$	$+ \langle 321^3\rangle$	$+ \langle 32^2\rangle$	$+ \langle 32^21\rangle$
	$+ \langle 41^2\rangle$	$+ 3\langle 41^3\rangle$	$+ 3\langle 41^4\rangle$	$+ \langle 41^5\rangle$	$+ \langle 42\rangle$
	$+ 2\langle 421\rangle$	$+ 2\langle 421^2\rangle$	$+ \langle 421^3\rangle$	$+ \langle 42^2\rangle$	$+ \langle 51^2\rangle$
	$+ 2\langle 51^3\rangle$	$+ 2\langle 51^4\rangle$	$+ \langle 51^5\rangle$	$+ \langle 521\rangle$	$+ \langle 521^2\rangle$
	$+ \langle 61^3\rangle$	$+ \langle 61^4\rangle$			
$\langle 6\rangle \circ \langle 1\rangle$	$\langle 5\rangle$	$+ \langle 51\rangle$	$+ \langle 6\rangle$	$+ \langle 61\rangle$	$+ \langle 7\rangle$
$\langle 1\rangle \circ \langle 1^6\rangle$	$\langle 1^5\rangle$	$+ \langle 1^6\rangle$	$+ \langle 1^7\rangle$	$+ \langle 21^4\rangle$	$+ \langle 21^5\rangle$
$\langle 6\rangle \circ \langle 1^2\rangle$	$\langle 41\rangle$	$+ \langle 41^2\rangle$	$+ \langle 5\rangle$	$+ 2\langle 51\rangle$	$+ \langle 51^2\rangle$
	$+ \langle 52\rangle$	$+ \langle 6\rangle$	$+ 2\langle 61\rangle$	$+ \langle 61^2\rangle$	$+ \langle 7\rangle$
	$+ \langle 71\rangle$				
$\langle 2\rangle \circ \langle 1^6\rangle$	$\langle 1^5\rangle$	$+ 2\langle 1^6\rangle$	$+ \langle 1^7\rangle$	$+ \langle 21^3\rangle$	$+ 2\langle 21^4\rangle$
	$+ 2\langle 21^5\rangle$	$+ \langle 21^6\rangle$	$+ \langle 2^21^2\rangle$	$+ \langle 2^21^3\rangle$	$+ \langle 31^4\rangle$
	$+ \langle 31^5\rangle$				
$\langle 6\rangle \circ \langle 1^3\rangle$	$\langle 31^2\rangle$	$+ \langle 31^3\rangle$	$+ \langle 41\rangle$	$+ 2\langle 41^2\rangle$	$+ \langle 41^3\rangle$
	$+ \langle 42\rangle$	$+ \langle 421\rangle$	$+ 2\langle 51\rangle$	$+ 3\langle 51^2\rangle$	$+ \langle 51^3\rangle$
	$+ \langle 52\rangle$	$+ \langle 521\rangle$	$+ \langle 6\rangle$	$+ 2\langle 61\rangle$	$+ 2\langle 61^2\rangle$
	$+ \langle 61^3\rangle$	$+ \langle 62\rangle$	$+ \langle 71\rangle$	$+ \langle 71^2\rangle$	
$\langle 3\rangle \circ \langle 1^6\rangle$	$\langle 1^5\rangle$	$+ 2\langle 1^6\rangle$	$+ \langle 1^7\rangle$	$+ \langle 21^3\rangle$	$+ 3\langle 21^4\rangle$
	$+ 3\langle 21^5\rangle$	$+ \langle 21^6\rangle$	$+ \langle 2^21\rangle$	$+ 2\langle 2^21^2\rangle$	$+ 2\langle 2^21^3\rangle$
	$+ \langle 2^21^4\rangle$	$+ \langle 2^3\rangle$	$+ \langle 2^31\rangle$	$+ \langle 31^3\rangle$	$+ 2\langle 31^4\rangle$
	$+ 2\langle 31^5\rangle$	$+ \langle 31^6\rangle$	$+ \langle 321^2\rangle$	$+ \langle 321^3\rangle$	$+ \langle 41^4\rangle$
	$+ \langle 41^5\rangle$				
$\langle 6\rangle \circ \langle 1^4\rangle$	$\langle 21^3\rangle$	$+ \langle 21^4\rangle$	$+ \langle 31^2\rangle$	$+ 2\langle 31^3\rangle$	$+ \langle 31^4\rangle$
	$+ \langle 321\rangle$	$+ \langle 321^2\rangle$	$+ 2\langle 41^2\rangle$	$+ 3\langle 41^3\rangle$	$+ \langle 41^4\rangle$
	$+ \langle 42\rangle$	$+ 2\langle 421\rangle$	$+ \langle 421^2\rangle$	$+ \langle 42^2\rangle$	$+ \langle 51\rangle$
	$+ 3\langle 51^2\rangle$	$+ 3\langle 51^3\rangle$	$+ \langle 51^4\rangle$	$+ \langle 52\rangle$	$+ 2\langle 521\rangle$
	$+ \langle 521^2\rangle$	$+ \langle 61\rangle$	$+ 2\langle 61^2\rangle$	$+ 2\langle 61^3\rangle$	$+ \langle 61^4\rangle$
	$+ \langle 62\rangle$	$+ \langle 621\rangle$	$+ \langle 71^2\rangle$	$+ \langle 71^3\rangle$	

$\langle 4\rangle \circ \langle 1^6\rangle$	$\langle 1^5\rangle$	$+ 2\langle 1^6\rangle$	$+ \langle 1^7\rangle$	$+ \langle 21^3\rangle$	$+ 3\langle 21^4\rangle$
	$+ 3\langle 21^5\rangle$	$+ \langle 21^6\rangle$	$+ \langle 2^21\rangle$	$+ 3\langle 2^21^2\rangle$	$+ 3\langle 2^21^3\rangle$
	$+ \langle 2^21^4\rangle$	$+ \langle 2^3\rangle$	$+ 2\langle 2^31\rangle$	$+ \langle 2^31^2\rangle$	$+ \langle 31^3\rangle$
	$+ 3\langle 31^4\rangle$	$+ 3\langle 31^5\rangle$	$+ \langle 31^6\rangle$	$+ \langle 321\rangle$	$+ 2\langle 321^2\rangle$
	$+ 2\langle 321^3\rangle$	$+ \langle 321^4\rangle$	$+ \langle 32^2\rangle$	$+ \langle 32^21\rangle$	$+ \langle 41^3\rangle$
	$+ 2\langle 41^4\rangle$	$+ 2\langle 41^5\rangle$	$+ \langle 41^6\rangle$	$+ \langle 421^2\rangle$	$+ \langle 421^3\rangle$
	$+ \langle 51^4\rangle$	$+ \langle 51^5\rangle$			
$\langle 6\rangle \circ \langle 1^5\rangle$	$\langle 1^5\rangle$	$+ \langle 1^6\rangle$	$+ \langle 21^3\rangle$	$+ 2\langle 21^4\rangle$	$+ \langle 21^5\rangle$
	$+ \langle 2^21^2\rangle$	$+ \langle 2^21^3\rangle$	$+ 2\langle 31^3\rangle$	$+ 3\langle 31^4\rangle$	$+ \langle 31^5\rangle$
	$+ \langle 321\rangle$	$+ 2\langle 321^2\rangle$	$+ \langle 321^3\rangle$	$+ \langle 32^2\rangle$	$+ \langle 32^21\rangle$
	$+ \langle 41^2\rangle$	$+ 3\langle 41^3\rangle$	$+ 3\langle 41^4\rangle$	$+ \langle 41^5\rangle$	$+ 2\langle 421\rangle$
	$+ 3\langle 421^2\rangle$	$+ \langle 421^3\rangle$	$+ \langle 42^2\rangle$	$+ \langle 42^21\rangle$	$+ \langle 51^2\rangle$
	$+ 3\langle 51^3\rangle$	$+ 3\langle 51^4\rangle$	$+ \langle 51^5\rangle$	$+ \langle 52\rangle$	$+ 2\langle 521\rangle$
	$+ 2\langle 521^2\rangle$	$+ \langle 521^3\rangle$	$+ \langle 52^2\rangle$	$+ \langle 61^2\rangle$	$+ 2\langle 61^3\rangle$
	$+ 2\langle 61^4\rangle$	$+ \langle 61^5\rangle$	$+ \langle 621\rangle$	$+ \langle 621^2\rangle$	$+ \langle 71^3\rangle$
	$+ \langle 71^4\rangle$				
$\langle 5\rangle \circ \langle 1^6\rangle$	$\langle 1^5\rangle$	$+ 2\langle 1^6\rangle$	$+ \langle 1^7\rangle$	$+ \langle 21^3\rangle$	$+ 3\langle 21^4\rangle$
	$+ 3\langle 21^5\rangle$	$+ \langle 21^6\rangle$	$+ 2\langle 2^21^2\rangle$	$+ 3\langle 2^21^3\rangle$	$+ \langle 2^21^4\rangle$
	$+ \langle 2^3\rangle$	$+ 2\langle 2^31\rangle$	$+ \langle 2^31^2\rangle$	$+ \langle 2^4\rangle$	$+ \langle 31^3\rangle$
	$+ 3\langle 31^4\rangle$	$+ 3\langle 31^5\rangle$	$+ \langle 31^6\rangle$	$+ \langle 321\rangle$	$+ 3\langle 321^2\rangle$
	$+ 3\langle 321^3\rangle$	$+ \langle 321^4\rangle$	$+ \langle 32^2\rangle$	$+ 2\langle 32^21\rangle$	$+ \langle 32^21^2\rangle$
	$+ \langle 41^3\rangle$	$+ 3\langle 41^4\rangle$	$+ 3\langle 41^5\rangle$	$+ \langle 41^6\rangle$	$+ \langle 421\rangle$
	$+ 2\langle 421^2\rangle$	$+ 2\langle 421^3\rangle$	$+ \langle 421^4\rangle$	$+ \langle 42^2\rangle$	$+ \langle 42^21\rangle$
	$+ \langle 51^3\rangle$	$+ 2\langle 51^4\rangle$	$+ 2\langle 51^5\rangle$	$+ \langle 51^6\rangle$	$+ \langle 521^2\rangle$
	$+ \langle 521^3\rangle$	$+ \langle 61^4\rangle$	$+ \langle 61^5\rangle$		
$\langle 6\rangle \circ \langle 1^6\rangle$	$\langle 1^5\rangle$	$+ 2\langle 1^6\rangle$	$+ \langle 1^7\rangle$	$+ 2\langle 21^4\rangle$	$+ 3\langle 21^5\rangle$
	$+ \langle 21^6\rangle$	$+ \langle 2^21^2\rangle$	$+ 2\langle 2^21^3\rangle$	$+ \langle 2^21^4\rangle$	$+ \langle 2^31\rangle$
	$+ \langle 2^31^2\rangle$	$+ \langle 31^3\rangle$	$+ 3\langle 31^4\rangle$	$+ 3\langle 31^5\rangle$	$+ \langle 31^6\rangle$
	$+ 2\langle 321^2\rangle$	$+ 3\langle 321^3\rangle$	$+ \langle 321^4\rangle$	$+ \langle 32^2\rangle$	$+ 2\langle 32^21\rangle$
	$+ \langle 32^21^2\rangle$	$+ \langle 32^3\rangle$	$+ \langle 41^3\rangle$	$+ 3\langle 41^4\rangle$	$+ 3\langle 41^5\rangle$
	$+ \langle 41^6\rangle$	$+ \langle 421\rangle$	$+ 3\langle 421^2\rangle$	$+ 3\langle 421^3\rangle$	$+ \langle 421^4\rangle$
	$+ \langle 42^2\rangle$	$+ 2\langle 42^21\rangle$	$+ \langle 42^21^2\rangle$	$+ \langle 51^3\rangle$	$+ 3\langle 51^4\rangle$
	$+ 3\langle 51^5\rangle$	$+ \langle 51^6\rangle$	$+ \langle 521\rangle$	$+ 2\langle 521^2\rangle$	$+ 2\langle 521^3\rangle$
	$+ \langle 521^4\rangle$	$+ \langle 52^2\rangle$	$+ \langle 52^21\rangle$	$+ \langle 61^3\rangle$	$+ 2\langle 61^4\rangle$
	$+ 2\langle 61^5\rangle$	$+ \langle 61^6\rangle$	$+ \langle 621^2\rangle$	$+ \langle 621^3\rangle$	$+ \langle 71^4\rangle$
	$+ \langle 71^5\rangle$				

Table III. Reduced inner products $\langle 1^k\rangle \cdot \langle 1^\ell\rangle$

$\langle 1\rangle \cdot \langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$+ \langle 1\rangle$	$+ \langle 1^2\rangle$	$+ \langle 2\rangle$	
$\langle 1^2\rangle \cdot \langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$+ \langle 1^2\rangle$	$+ \langle 1^3\rangle$	$+ \langle 2\rangle$	$+ \langle 21\rangle$
$\langle 1^2\rangle \cdot \langle 1^2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$+ \langle 1\rangle$	$+ \langle 1^2\rangle$	$+ \langle 1^3\rangle$	$+ \langle 1^4\rangle$
	$+ 2\langle 2\rangle$	$+ 2\langle 21\rangle$	$+ \langle 21^2\rangle$	$+ \langle 2^2\rangle$	$+ \langle 3\rangle$
$\langle 1^3\rangle \cdot \langle 1\rangle$	$\langle 1^2\rangle$	$+ \langle 1^3\rangle$	$+ \langle 1^4\rangle$	$+ \langle 21\rangle$	$+ \langle 21^2\rangle$
$\langle 1^3\rangle \cdot \langle 1^2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$+ \langle 1^2\rangle$	$+ \langle 1^3\rangle$	$+ \langle 1^4\rangle$	$+ \langle 1^5\rangle$
	$+ \langle 2\rangle$	$+ 2\langle 21\rangle$	$+ 2\langle 21^2\rangle$	$+ \langle 21^3\rangle$	$+ \langle 2^2\rangle$
	$+ \langle 2^2 1\rangle$	$+ \langle 3\rangle$	$+ \langle 31\rangle$		
$\langle 1^3\rangle \cdot \langle 1^3\rangle$	$\langle 0\rangle$	$+ \langle 1\rangle$	$+ \langle 1^2\rangle$	$+ \langle 1^3\rangle$	$+ \langle 1^4\rangle$
	$+ \langle 1^5\rangle$	$+ \langle 1^6\rangle$	$+ 2\langle 2\rangle$	$+ 2\langle 21\rangle$	$+ 2\langle 21^2\rangle$
	$+ 2\langle 21^3\rangle$	$+ \langle 21^4\rangle$	$+ 2\langle 2^2\rangle$	$+ 2\langle 2^2 1\rangle$	$+ \langle 2^2 1^2\rangle$
	$+ \langle 2^3\rangle$	$+ 2\langle 3\rangle$	$+ 2\langle 31\rangle$	$+ \langle 31^2\rangle$	$+ \langle 32\rangle$
	$+ \langle 4\rangle$				
$\langle 1^4\rangle \cdot \langle 1\rangle$	$\langle 1^3\rangle$	$+ \langle 1^4\rangle$	$+ \langle 1^5\rangle$	$+ \langle 21^2\rangle$	$+ \langle 21^3\rangle$
$\langle 1^4\rangle \cdot \langle 1^2\rangle$	$\langle 1^2\rangle$	$+ \langle 1^3\rangle$	$+ \langle 1^4\rangle$	$+ \langle 1^5\rangle$	$+ \langle 1^6\rangle$
	$+ \langle 21\rangle$	$+ 2\langle 21^2\rangle$	$+ 2\langle 21^3\rangle$	$+ \langle 21^4\rangle$	$+ \langle 2^2 1\rangle$
	$+ \langle 2^2 1^2\rangle$	$+ \langle 31\rangle$	$+ \langle 31^2\rangle$		
$\langle 1^4\rangle \cdot \langle 1^3\rangle$	$\langle 1\rangle$	$+ \langle 1^2\rangle$	$+ \langle 1^3\rangle$	$+ \langle 1^4\rangle$	$+ \langle 1^5\rangle$
	$+ \langle 1^6\rangle$	$+ \langle 1^7\rangle$	$+ \langle 2\rangle$	$+ 2\langle 21\rangle$	$+ 2\langle 21^2\rangle$
	$+ 2\langle 21^3\rangle$	$+ 2\langle 21^4\rangle$	$+ \langle 21^5\rangle$	$+ \langle 2^2\rangle$	$+ 2\langle 2^2 1\rangle$
	$+ 2\langle 2^2 1^2\rangle$	$+ \langle 2^2 1^3\rangle$	$+ \langle 2^3\rangle$	$+ \langle 2^3 1\rangle$	$+ \langle 3\rangle$
	$+ 2\langle 31\rangle$	$+ 2\langle 31^2\rangle$	$+ \langle 31^3\rangle$	$+ \langle 32\rangle$	$+ \langle 321\rangle$
	$+ \langle 4\rangle$	$+ \langle 41\rangle$			
$\langle 1^4\rangle \cdot \langle 1^4\rangle$	$\langle 0\rangle$	$+ \langle 1\rangle$	$+ \langle 1^2\rangle$	$+ \langle 1^3\rangle$	$+ \langle 1^4\rangle$
	$+ \langle 1^5\rangle$	$+ \langle 1^6\rangle$	$+ \langle 1^7\rangle$	$+ \langle 1^8\rangle$	$+ 2\langle 2\rangle$
	$+ 2\langle 21\rangle$	$+ 2\langle 21^2\rangle$	$+ 2\langle 21^3\rangle$	$+ 2\langle 21^4\rangle$	$+ 2\langle 21^5\rangle$
	$+ \langle 21^6\rangle$	$+ 2\langle 2^2\rangle$	$+ 2\langle 2^2 1\rangle$	$+ 2\langle 2^2 1^2\rangle$	$+ 2\langle 2^2 1^3\rangle$
	$+ \langle 2^2 1^4\rangle$	$+ 2\langle 2^3\rangle$	$+ 2\langle 2^3 1\rangle$	$+ \langle 2^3 1^2\rangle$	$+ \langle 2^4\rangle$
	$+ 2\langle 3\rangle$	$+ 2\langle 31\rangle$	$+ 2\langle 31^2\rangle$	$+ 2\langle 31^3\rangle$	$+ \langle 31^4\rangle$
	$+ 2\langle 32\rangle$	$+ 2\langle 321\rangle$	$+ \langle 321^2\rangle$	$+ \langle 32^2\rangle$	$+ 2\langle 4\rangle$
	$+ 2\langle 41\rangle$	$+ \langle 41^2\rangle$	$+ \langle 42\rangle$	$+ \langle 5\rangle$	
$\langle 1^5\rangle \cdot \langle 1\rangle$	$\langle 1^4\rangle$	$+ \langle 1^5\rangle$	$+ \langle 1^6\rangle$	$+ \langle 21^3\rangle$	$+ \langle 21^4\rangle$
$\langle 1^5\rangle \cdot \langle 1^2\rangle$	$\langle 1^3\rangle$	$+ \langle 1^4\rangle$	$+ \langle 1^5\rangle$	$+ \langle 1^6\rangle$	$+ \langle 1^7\rangle$
	$+ \langle 21^2\rangle$	$+ 2\langle 21^3\rangle$	$+ 2\langle 21^4\rangle$	$+ \langle 21^5\rangle$	$+ \langle 2^2 1^2\rangle$
	$+ \langle 2^2 1^3\rangle$	$+ \langle 31^2\rangle$	$+ \langle 31^3\rangle$		
$\langle 1^5\rangle \cdot \langle 1^3\rangle$	$\langle 1^2\rangle$	$+ \langle 1^3\rangle$	$+ \langle 1^4\rangle$	$+ \langle 1^5\rangle$	$+ \langle 1^6\rangle$
	$+ \langle 1^7\rangle$	$+ \langle 1^8\rangle$	$+ \langle 21\rangle$	$+ 2\langle 21^2\rangle$	$+ 2\langle 21^3\rangle$
	$+ 2\langle 21^4\rangle$	$+ 2\langle 21^5\rangle$	$+ \langle 21^6\rangle$	$+ \langle 2^2 1\rangle$	$+ 2\langle 2^2 1^2\rangle$
	$+ 2\langle 2^2 1^3\rangle$	$+ \langle 2^2 1^4\rangle$	$+ \langle 2^3 1\rangle$	$+ \langle 2^3 1^2\rangle$	$+ \langle 31\rangle$
	$+ 2\langle 31^2\rangle$	$+ 2\langle 31^3\rangle$	$+ \langle 31^4\rangle$	$+ \langle 321\rangle$	$+ \langle 321^2\rangle$
	$+ \langle 41\rangle$	$+ \langle 41^2\rangle$			

$\langle 1^5\rangle \cdot \langle 1^4\rangle$	$\langle 1\rangle$	$+ \langle 1^2\rangle$	$+ \langle 1^3\rangle$	$+ \langle 1^4\rangle$	$+ \langle 1^5\rangle$
	$+ \langle 1^6\rangle$	$+ \langle 1^7\rangle$	$+ \langle 1^8\rangle$	$+ \langle 1^9\rangle$	$+ \langle 2\rangle$
	$+ 2\langle 21\rangle$	$+ 2\langle 21^2\rangle$	$+ 2\langle 21^3\rangle$	$+ 2\langle 21^4\rangle$	$+ 2\langle 21^5\rangle$
	$+ 2\langle 21^6\rangle$	$+ \langle 21^7\rangle$	$+ \langle 2^2\rangle$	$+ 2\langle 2^21\rangle$	$+ 2\langle 2^21^2\rangle$
	$+ 2\langle 2^21^3\rangle$	$+ 2\langle 2^21^4\rangle$	$+ \langle 2^21^5\rangle$	$+ \langle 2^3\rangle$	$+ 2\langle 2^31\rangle$
	$+ 2\langle 2^31^2\rangle$	$+ \langle 2^31^3\rangle$	$+ \langle 2^4\rangle$	$+ \langle 2^41\rangle$	$+ \langle 3\rangle$
	$+ 2\langle 31\rangle$	$+ 2\langle 31^2\rangle$	$+ 2\langle 31^3\rangle$	$+ 2\langle 31^4\rangle$	$+ \langle 31^5\rangle$
	$+ \langle 32\rangle$	$+ 2\langle 321\rangle$	$+ 2\langle 321^2\rangle$	$+ \langle 321^3\rangle$	$+ \langle 32^2\rangle$
	$+ \langle 32^21\rangle$	$+ \langle 4\rangle$	$+ 2\langle 41\rangle$	$+ 2\langle 41^2\rangle$	$+ \langle 41^3\rangle$
	$+ \langle 42\rangle$	$+ \langle 421\rangle$	$+ \langle 5\rangle$	$+ \langle 51\rangle$	
$\langle 1^5\rangle \cdot \langle 1^5\rangle$	$\langle 0\rangle$	$+ \langle 1\rangle$	$+ \langle 1^2\rangle$	$+ \langle 1^3\rangle$	$+ \langle 1^4\rangle$
	$+ \langle 1^5\rangle$	$+ \langle 1^6\rangle$	$+ \langle 1^7\rangle$	$+ \langle 1^8\rangle$	$+ \langle 1^9\rangle$
	$+ \langle 1^{10}\rangle$	$+ 2\langle 2\rangle$	$+ 2\langle 21\rangle$	$+ 2\langle 21^2\rangle$	$+ 2\langle 21^3\rangle$
	$+ 2\langle 21^4\rangle$	$+ 2\langle 21^5\rangle$	$+ 2\langle 21^6\rangle$	$+ 2\langle 21^7\rangle$	$+ \langle 21^8\rangle$
	$+ 2\langle 2^2\rangle$	$+ 2\langle 2^21\rangle$	$+ 2\langle 2^21^2\rangle$	$+ 2\langle 2^21^3\rangle$	$+ 2\langle 2^21^4\rangle$
	$+ 2\langle 2^21^5\rangle$	$+ \langle 2^21^6\rangle$	$+ 2\langle 2^3\rangle$	$+ 2\langle 2^31\rangle$	$+ 2\langle 2^31^2\rangle$
	$+ 2\langle 2^31^3\rangle$	$+ \langle 2^31^4\rangle$	$+ 2\langle 2^4\rangle$	$+ 2\langle 2^41\rangle$	$+ \langle 2^41^2\rangle$
	$+ \langle 2^5\rangle$	$+ 2\langle 3\rangle$	$+ 2\langle 31\rangle$	$+ 2\langle 31^2\rangle$	$+ 2\langle 31^3\rangle$
	$+ 2\langle 31^4\rangle$	$+ 2\langle 31^5\rangle$	$+ \langle 31^6\rangle$	$+ 2\langle 32\rangle$	$+ 2\langle 321\rangle$
	$+ 2\langle 321^2\rangle$	$+ 2\langle 321^3\rangle$	$+ \langle 321^4\rangle$	$+ 2\langle 32^2\rangle$	$+ 2\langle 32^21\rangle$
	$+ \langle 32^21^2\rangle$	$+ \langle 32^3\rangle$	$+ 2\langle 4\rangle$	$+ 2\langle 41\rangle$	$+ 2\langle 41^2\rangle$
	$+ 2\langle 41^3\rangle$	$+ \langle 41^4\rangle$	$+ 2\langle 42\rangle$	$+ 2\langle 421\rangle$	$+ \langle 421^2\rangle$
	$+ \langle 42^2\rangle$	$+ 2\langle 5\rangle$	$+ 2\langle 51\rangle$	$+ \langle 51^2\rangle$	$+ \langle 52\rangle$
	$+ \langle 6\rangle$				
$\langle 1^6\rangle \cdot \langle 1\rangle$	$\langle 1^5\rangle$	$+ \langle 1^6\rangle$	$+ \langle 1^7\rangle$	$+ \langle 21^4\rangle$	$+ \langle 21^5\rangle$
$\langle 1^6\rangle \cdot \langle 1^2\rangle$	$\langle 1^4\rangle$	$+ \langle 1^5\rangle$	$+ \langle 1^6\rangle$	$+ \langle 1^7\rangle$	$+ \langle 1^8\rangle$
	$+ \langle 21^3\rangle$	$+ 2\langle 21^4\rangle$	$+ 2\langle 21^5\rangle$	$+ \langle 21^6\rangle$	$+ \langle 2^21^3\rangle$
	$+ \langle 2^21^4\rangle$	$+ \langle 31^3\rangle$	$+ \langle 31^4\rangle$		
$\langle 1^6\rangle \cdot \langle 1^3\rangle$	$\langle 1^3\rangle$	$+ \langle 1^4\rangle$	$+ \langle 1^5\rangle$	$+ \langle 1^6\rangle$	$+ \langle 1^7\rangle$
	$+ \langle 1^8\rangle$	$+ \langle 1^9\rangle$	$+ \langle 21^2\rangle$	$+ 2\langle 21^3\rangle$	$+ 2\langle 21^4\rangle$
	$+ 2\langle 21^5\rangle$	$+ 2\langle 21^6\rangle$	$+ \langle 21^7\rangle$	$+ \langle 2^21^2\rangle$	$+ 2\langle 2^21^3\rangle$
	$+ 2\langle 2^21^4\rangle$	$+ \langle 2^21^5\rangle$	$+ \langle 2^31^2\rangle$	$+ \langle 2^31^3\rangle$	$+ \langle 31^2\rangle$
	$+ 2\langle 31^3\rangle$	$+ 2\langle 31^4\rangle$	$+ \langle 31^5\rangle$	$+ \langle 321^2\rangle$	$+ \langle 321^3\rangle$
	$+ \langle 41^2\rangle$	$+ \langle 41^3\rangle$			
$\langle 1^6\rangle \cdot \langle 1^4\rangle$	$\langle 1^2\rangle$	$+ \langle 1^3\rangle$	$+ \langle 1^4\rangle$	$+ \langle 1^5\rangle$	$+ \langle 1^6\rangle$
	$+ \langle 1^7\rangle$	$+ \langle 1^8\rangle$	$+ \langle 1^9\rangle$	$+ \langle 1^{10}\rangle$	$+ \langle 21\rangle$
	$+ 2\langle 21^2\rangle$	$+ 2\langle 21^3\rangle$	$+ 2\langle 21^4\rangle$	$+ 2\langle 21^5\rangle$	$+ 2\langle 21^6\rangle$
	$+ 2\langle 21^7\rangle$	$+ \langle 21^8\rangle$	$+ \langle 2^21\rangle$	$+ 2\langle 2^21^2\rangle$	$+ 2\langle 2^21^3\rangle$
	$+ 2\langle 2^21^4\rangle$	$+ 2\langle 2^21^5\rangle$	$+ \langle 2^21^6\rangle$	$+ \langle 2^31\rangle$	$+ 2\langle 2^31^2\rangle$
	$+ 2\langle 2^31^3\rangle$	$+ \langle 2^31^4\rangle$	$+ \langle 2^41\rangle$	$+ \langle 2^41^2\rangle$	$+ \langle 31\rangle$
	$+ 2\langle 31^2\rangle$	$+ 2\langle 31^3\rangle$	$+ 2\langle 31^4\rangle$	$+ 2\langle 31^5\rangle$	$+ \langle 31^6\rangle$
	$+ \langle 321\rangle$	$+ 2\langle 321^2\rangle$	$+ 2\langle 321^3\rangle$	$+ \langle 321^4\rangle$	$+ \langle 32^21\rangle$
	$+ \langle 32^21^2\rangle$	$+ \langle 41\rangle$	$+ 2\langle 41^2\rangle$	$+ 2\langle 41^3\rangle$	$+ \langle 41^4\rangle$
	$+ \langle 421\rangle$	$+ \langle 421^2\rangle$	$+ \langle 51\rangle$	$+ \langle 51^2\rangle$	

$\langle 1^6\rangle \cdot \langle 1^5\rangle$	$\langle 1\rangle$	$+ \langle 1^2\rangle$	$+ \langle 1^3\rangle$	$+ \langle 1^4\rangle$	$+ \langle 1^5\rangle$
	$+ \langle 1^6\rangle$	$+ \langle 1^7\rangle$	$+ \langle 1^8\rangle$	$+ \langle 1^9\rangle$	$+ \langle 1^{10}\rangle$
	$+ \langle 1^{11}\rangle$	$+ \langle 2\rangle$	$+ 2\langle 21\rangle$	$+ 2\langle 21^2\rangle$	$+ 2\langle 21^3\rangle$
	$+ 2\langle 21^4\rangle$	$+ 2\langle 21^5\rangle$	$+ 2\langle 21^6\rangle$	$+ 2\langle 21^7\rangle$	$+ 2\langle 21^8\rangle$
	$+ \langle 21^9\rangle$	$+ \langle 2^2\rangle$	$+ 2\langle 2^21\rangle$	$+ 2\langle 2^21^2\rangle$	$+ 2\langle 2^21^3\rangle$
	$+ 2\langle 2^21^4\rangle$	$+ 2\langle 2^21^5\rangle$	$+ 2\langle 2^21^6\rangle$	$+ \langle 2^21^7\rangle$	$+ \langle 2^3\rangle$
	$+ 2\langle 2^31\rangle$	$+ 2\langle 2^31^2\rangle$	$+ 2\langle 2^31^3\rangle$	$+ 2\langle 2^31^4\rangle$	$+ \langle 2^31^5\rangle$
	$+ \langle 2^4\rangle$	$+ 2\langle 2^41\rangle$	$+ 2\langle 2^41^2\rangle$	$+ \langle 2^41^3\rangle$	$+ \langle 2^5\rangle$
	$+ \langle 2^51\rangle$	$+ \langle 3\rangle$	$+ 2\langle 31\rangle$	$+ 2\langle 31^2\rangle$	$+ 2\langle 31^3\rangle$
	$+ 2\langle 31^4\rangle$	$+ 2\langle 31^5\rangle$	$+ 2\langle 31^6\rangle$	$+ \langle 31^7\rangle$	$+ \langle 32\rangle$
	$+ 2\langle 321\rangle$	$+ 2\langle 321^2\rangle$	$+ 2\langle 321^3\rangle$	$+ 2\langle 321^4\rangle$	$+ \langle 321^5\rangle$
	$+ \langle 32^2\rangle$	$+ 2\langle 32^21\rangle$	$+ 2\langle 32^21^2\rangle$	$+ \langle 32^21^3\rangle$	$+ \langle 32^3\rangle$
	$+ \langle 32^31\rangle$	$+ \langle 4\rangle$	$+ 2\langle 41\rangle$	$+ 2\langle 41^2\rangle$	$+ 2\langle 41^3\rangle$
	$+ 2\langle 41^4\rangle$	$+ \langle 41^5\rangle$	$+ \langle 42\rangle$	$+ 2\langle 421\rangle$	$+ 2\langle 421^2\rangle$
	$+ \langle 421^3\rangle$	$+ \langle 42^2\rangle$	$+ \langle 42^21\rangle$	$+ \langle 5\rangle$	$+ 2\langle 51\rangle$
	$+ 2\langle 51^2\rangle$	$+ \langle 51^3\rangle$	$+ \langle 52\rangle$	$+ \langle 521\rangle$	$+ \langle 6\rangle$
	$+ \langle 61\rangle$				
$\langle 1^6\rangle \cdot \langle 1^6\rangle$	$\langle 0\rangle$	$+ \langle 1\rangle$	$+ \langle 1^2\rangle$	$+ \langle 1^3\rangle$	$+ \langle 1^4\rangle$
	$+ \langle 1^5\rangle$	$+ \langle 1^6\rangle$	$+ \langle 1^7\rangle$	$+ \langle 1^8\rangle$	$+ \langle 1^9\rangle$
	$+ \langle 1^{10}\rangle$	$+ \langle 1^{11}\rangle$	$+ \langle 1^{12}\rangle$	$+ 2\langle 2\rangle$	$+ 2\langle 21\rangle$
	$+ 2\langle 21^2\rangle$	$+ 2\langle 21^3\rangle$	$+ 2\langle 21^4\rangle$	$+ 2\langle 21^5\rangle$	$+ 2\langle 21^6\rangle$
	$+ 2\langle 21^7\rangle$	$+ 2\langle 21^8\rangle$	$+ 2\langle 21^9\rangle$	$+ \langle 21^{10}\rangle$	$+ 2\langle 2^2\rangle$
	$+ 2\langle 2^21\rangle$	$+ 2\langle 2^21^2\rangle$	$+ 2\langle 2^21^3\rangle$	$+ 2\langle 2^21^4\rangle$	$+ 2\langle 2^21^5\rangle$
	$+ 2\langle 2^21^6\rangle$	$+ 2\langle 2^21^7\rangle$	$+ \langle 2^21^8\rangle$	$+ 2\langle 2^3\rangle$	$+ 2\langle 2^31\rangle$
	$+ 2\langle 2^31^2\rangle$	$+ 2\langle 2^31^3\rangle$	$+ 2\langle 2^31^4\rangle$	$+ 2\langle 2^31^5\rangle$	$+ \langle 2^31^6\rangle$
	$+ 2\langle 2^4\rangle$	$+ 2\langle 2^41\rangle$	$+ 2\langle 2^41^2\rangle$	$+ 2\langle 2^41^3\rangle$	$+ \langle 2^41^4\rangle$
	$+ 2\langle 2^5\rangle$	$+ 2\langle 2^51\rangle$	$+ \langle 2^51^2\rangle$	$+ \langle 2^6\rangle$	$+ 2\langle 3\rangle$
	$+ 2\langle 31\rangle$	$+ 2\langle 31^2\rangle$	$+ 2\langle 31^3\rangle$	$+ 2\langle 31^4\rangle$	$+ 2\langle 31^5\rangle$
	$+ 2\langle 31^6\rangle$	$+ 2\langle 31^7\rangle$	$+ \langle 31^8\rangle$	$+ 2\langle 32\rangle$	$+ 2\langle 321\rangle$
	$+ 2\langle 321^2\rangle$	$+ 2\langle 321^3\rangle$	$+ 2\langle 321^4\rangle$	$+ 2\langle 321^5\rangle$	$+ \langle 321^6\rangle$
	$+ 2\langle 32^2\rangle$	$+ 2\langle 32^21\rangle$	$+ 2\langle 32^21^2\rangle$	$+ 2\langle 32^21^3\rangle$	$+ \langle 32^21^4\rangle$
	$+ 2\langle 32^3\rangle$	$+ 2\langle 32^31\rangle$	$+ \langle 32^31^2\rangle$	$+ \langle 32^4\rangle$	$+ 2\langle 4\rangle$
	$+ 2\langle 41\rangle$	$+ 2\langle 41^2\rangle$	$+ 2\langle 41^3\rangle$	$+ 2\langle 41^4\rangle$	$+ 2\langle 41^5\rangle$
	$+ \langle 41^6\rangle$	$+ 2\langle 42\rangle$	$+ 2\langle 421\rangle$	$+ 2\langle 421^2\rangle$	$+ 2\langle 421^3\rangle$
	$+ \langle 421^4\rangle$	$+ 2\langle 42^2\rangle$	$+ 2\langle 42^21\rangle$	$+ \langle 42^21^2\rangle$	$+ \langle 42^3\rangle$
	$+ 2\langle 5\rangle$	$+ 2\langle 51\rangle$	$+ 2\langle 51^2\rangle$	$+ 2\langle 51^3\rangle$	$+ \langle 51^4\rangle$
	$+ 2\langle 52\rangle$	$+ 2\langle 521\rangle$	$+ \langle 521^2\rangle$	$+ \langle 52^2\rangle$	$+ 2\langle 6\rangle$
	$+ 2\langle 61\rangle$	$+ \langle 61^2\rangle$	$+ \langle 62\rangle$	$+ \langle 7\rangle$	